

Mathematische Algorithmen mit Python

Aufgaben vom Sieb des Eratosthenes bis zur RSA-Verschlüsselung

DAS INHALTS- VERZEICHNIS



» Hier geht's
direkt
zum Buch

Inhalt

Materialien zum Buch	15
----------------------------	----

1 Einführung 17

1.1 Entwicklungsumgebungen	22
1.1.1 IDLE	23
1.1.2 Thonny	24
1.2 Die Installation der Module	25
1.3 Schlüsselwörter von Python	28
1.4 Maschinengenauigkeit, Rundungsfehler und Stellenauslöschung	30
1.4.1 Maschinengenauigkeit	31
1.4.2 Rundungsfehler	32
1.4.3 Stellenauslöschung	34
1.5 Algorithmenbegriffe	34
1.6 Übungen	37

2 Datentypen und Datenstrukturen 41

2.1 Tupel	42
2.1.1 Exkurs: Elementare Datentypen von Python	44
2.1.2 Würfelsimulation	47
2.1.3 Vertauschen von Objekten	48
2.2 Set	49
2.2.1 Mengenlehre	50
2.2.2 Vereinigungsmenge	51
2.2.3 Schnittmenge	51
2.2.4 Differenzmenge	51
2.3 Liste	54
2.4 Dictionary	60

2.5	Zusammenfassung	65
2.6	Aufgaben	66
3	Programmstrukturen	67
3.1	Mathematische Operatoren	68
3.2	Die lineare Programmstruktur	69
3.3	Verzweigungsstrukturen	72
3.3.1	Einfachauswahl	73
3.3.2	Mehrfachauswahl	75
3.4	Wiederholstrukturen	76
3.4.1	Die while-Schleife	77
3.4.2	Die for-Schleife	82
3.5	Operation auf Vektoren und Matrizen	89
3.5.1	Skalarprodukt	89
3.5.2	Addition von Matrizen	90
3.5.3	Multiplikation von Matrizen	92
3.6	Unterprogrammtechnik mit Funktionen	95
3.6.1	Eingebaute Funktionen	96
3.6.2	Selbst erstellte Funktionen	97
3.6.3	Funktionen mit einem Rückgabewert	98
3.6.4	Funktionen mit mehreren Rückgabewerten	100
3.6.5	Namensraum	101
3.6.6	Rekursion: Eine Funktion ruft sich selbst auf	103
3.7	Einen Algorithmus optimieren	107
3.7.1	Binäre Exponentiation	107
3.7.2	Das Horner-Schema	110
3.8	Objektorientierte Programmierung	113
3.8.1	Definition einer Klasse	113
3.8.2	Vererbung	118
3.9	Laufzeitanalyse	120
3.9.1	Messen der Laufzeit	120
3.9.2	Komplexitätsklassen	123
3.10	Aufgaben	127

4 Die Python-Erweiterungsmodule NumPy, Matplotlib, SymPy und SciPy 131

4.1	NumPy	132
4.1.1	Wichtige NumPy-Funktionen	132
4.1.2	Wertetabellen für mathematische Funktionen erstellen	135
4.1.3	Die Datenstruktur von ndarray	136
4.1.4	Rechnen mit Matrizen	136
4.2	Matplotlib	139
4.2.1	Die objektorientierte API	140
4.2.2	Funktionsplot mit Beschriftungen	141
4.2.3	Unterdiagramme	144
4.2.4	Das Slider-Steuerelement	146
4.2.5	Funktionsplotter	148
4.3	SymPy	151
4.3.1	Symbolische Operationen mit Matrizen	152
4.3.2	Symbolisches Differenzieren und Integrieren	154
4.4	SciPy	155
4.5	Aufgaben	158

5 Zahlen 161

5.1	Natürliche und ganze Zahlen	165
5.1.1	Teilbarkeit	165
5.1.2	Division mit Rest	168
5.1.3	Der euklidische Algorithmus	171
5.1.4	Der erweiterte euklidische Algorithmus	176
5.1.5	Primzahlen	178
5.1.6	RSA-Verschlüsselung	190
5.2	Rationale Zahlen	198
5.3	Irrationale Zahlen	202
5.4	Transzendente Zahlen	206
5.4.1	Die Kreiszahl π	206
5.4.2	Die eulersche Zahl e	216
5.5	Aufgaben	218

6 Gleichungssysteme 219

6.1	Lineare Gleichungssysteme	219
6.1.1	Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems	220
6.1.2	Der Gauß-Algorithmus	224
6.1.3	Der Gauß-Jordan-Algorithmus	231
6.1.4	Lösung mit Determinanten: Die cramersche Regel	235
6.1.5	Lösung mit der Inversen einer Matrix	241
6.1.6	Lösung mit der NumPy-Funktion solve()	244
6.1.7	Lösung mit SymPy-Methoden	245
6.2	Iterative Verfahren	250
6.2.1	Das Jacobi-Verfahren	251
6.2.2	Das Gauß-Seidel-Verfahren	257
6.2.3	Konvergenzverhalten	261
6.3	Nichtlineare Gleichungssysteme	263
6.3.1	Lösung mit SciPy	264
6.3.2	Lösung mit SymPy	265
6.4	Aufgaben	266

7 Folgen 269

7.1	Divergente Folgen	269
7.2	Differenzfolgen	273
7.3	Konvergente Folgen	275
7.4	Rekursive Folgen	278
7.5	Geometrische Folgen	280
7.6	Der Grenzwert von Folgen	284
7.6.1	Grenzwertdarstellung im Koordinatensystem	285
7.6.2	Symbolische Berechnung des Grenzwertes	287
7.7	Aufgaben	288

8	Nullstellen berechnen	289
8.1	Bisektionsverfahren	290
8.2	Fixpunktverfahren	295
8.3	Newton-Verfahren	301
8.4	Vergleich der Verfahren	304
8.5	Numerische Berechnung mehrerer Nullstellen	306
8.6	Aufgaben	308
9	Numerische Differenziation	309
9.1	Simulation des Grenzwertprozesses	310
9.2	Tangentengleichung	313
9.3	Vorwärts-, Rückwärts- und zentraler Differenzenquotient	316
9.3.1	Vorwärtsdifferenzenquotient	317
9.3.2	Rückwärtsdifferenzenquotient	318
9.3.3	Der zentrale Differenzenquotient	318
9.3.4	Differenzenquotienten mit selbst erstellten Funktionen berechnen	320
9.4	Optimale Schrittweite	323
9.5	Höhere Ableitungen	326
9.5.1	Höhere Ableitungen aus vorgegebenen Formeln berechnen	326
9.5.2	Höhere Ableitungen aus der 1. Ableitung berechnen	328
9.5.3	Höhere Ableitungen mit dem erweiterten Horner-Schema berechnen	330
9.5.4	Höhere Ableitungen mit dem Modul Numdifftools berechnen	332
9.6	Kurvendiskussion	333
9.6.1	Statische Darstellung von Extremwerten und Wendepunkt	334
9.6.2	Kriterien für Extremstellen	336
9.6.3	Simulation der Tangentensteigung für ein Polynom 3. Grades	337
9.6.4	Kurvendiskussion mit Numdifftools	339
9.6.5	Kurvendiskussion mit SymPy	343
9.6.6	Umgekehrte Kurvendiskussion	345
9.7	Aufgaben	348

10 Reihen 351

10.1 Divergierende Reihen	352
10.1.1 Die Reihe der Quadratzahlen	352
10.1.2 Harmonische Reihe	355
10.2 Konvergente Reihen	358
10.2.1 Die eulersche Zahl e	358
10.2.2 Vergleich von Konvergenzgeschwindigkeiten	362
10.2.3 Konvergenzkriterien	364
10.3 Geometrische Reihen	366
10.4 Potenzreihen und die Taylor-Entwicklung	371
10.4.1 Potenzreihen	372
10.4.2 Taylor-Entwicklung	376
10.5 Aufgaben	381

11 Numerische Integration 383

11.1 Das Problem der Flächenberechnung	383
11.1.1 Simulation eines bestimmten Integrals	385
11.1.2 Simulation des Fehlers	388
11.2 Verfahren der Flächenberechnung	391
11.2.1 Die summierte Mittelpunktregel	391
11.2.2 Die summierte Trapezregel	395
11.2.3 Das Simpson-Verfahren	398
11.2.4 Vergleich der Verfahren	401
11.3 Bogenlängen	406
11.4 Rotationskörper	409
11.5 Zweifachintegrale	413
11.5.1 Zweifachintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen	413
11.5.2 Zweifachintegrale mit variablen Integrationsgrenzen	418
11.6 Aufgaben	421

12 Differenzialgleichungen	423
12.1 Das eulersche Polygonzugverfahren	424
12.2 Richtungsfelder	429
12.3 Differenzialgleichungen 1. Ordnung	431
12.3.1 Die konstante Wachstumsrate	432
12.3.2 Die konstante Wachstumsrate mit oberer Wachstumsschranke	435
12.3.3 Die logistische Wachstumsrate	437
12.4 Nichtlineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung	438
12.5 DGL-System für ein gekoppeltes Fadenpendel	443
12.6 DGL-System mit zwei Unbekannten	446
12.7 DGL-System mit drei Unbekannten	449
12.8 Optimierungen des Euler-Verfahrens	452
12.8.1 Das Heun-Verfahren	452
12.8.2 Das vierstufige Runge-Kutta-Verfahren	452
12.8.3 Vergleich der Verfahren	453
12.9 Lösung von Differenzialgleichungen mit SciPy	455
12.10 Lösen von Differenzialgleichungen mit Sympy	459
12.11 Aufgaben	462
13 Ausgleichsrechnungen	463
13.1 Lineare Ausgleichsprobleme	464
13.1.1 Lösung mit linearen Gleichungssystemen	464
13.1.2 Lösung mit dem Vektoransatz	470
13.1.3 Lösung mit dem erweiterten Vektoransatz	473
13.1.4 Anwendungsbeispiel: Bremsweg	476
13.1.5 Anwendungsbeispiel: Planetenbahn	479
13.2 Nichtlineare Ausgleichsprobleme	483
13.2.1 Exponentialfunktion	483
13.2.2 Potenzfunktion	485
13.3 Aufgaben	487

14 Algorithmen für die Berechnung statistischer Kennzahlen 489

14.1 Normalverteilte Zufallszahlen erzeugen	490
14.1.1 Histogramm	492
14.1.2 Normalverteilung	493
14.2 Lageparameter	494
14.2.1 Modus	495
14.2.2 Median	495
14.2.3 Arithmetischer Mittelwert	500
14.2.4 Harmonischer Mittelwert	501
14.2.5 Geometrischer Mittelwert	503
14.3 Streuparameter	504
14.3.1 Spannweite	504
14.3.2 Standardabweichung	507
14.4 Strukturparameter	508
14.4.1 Schiefe	508
14.4.2 Wölbung	511
14.5 Aufgaben	514

15 Fraktale 517

15.1 Turtle-Grafik	518
15.2 Die kochsche Schneeflocke	521
15.3 Das Sierpinski-Dreieck	527
15.4 Der Pythagoras-Baum	531
15.5 Mandelbrot- und Julia-Mengen	534
15.5.1 Mandelbrot-Menge	535
15.5.2 Julia-Menge	540
15.5.3 Farbige Darstellung von Julia-Mengen	543
15.6 Aufgaben	546

Anhang 549

A.1	Wichtige mathematische Begriffe und Sätze	549
A.1.1	Grundlegende Begriffe der Mathematik	549
A.1.2	Wichtige Sätze der Mathematik	550
A.2	Matplotlib-Eigenschaften	552

Literaturverzeichnis 555

Index	559
-------	-----