edv-buchversand.de

Fit fürs Studium - Mathematik

Für alle MINT-Fächer

» Hier geht's direkt zum Buch

DIE LESEPROBE

Kapitel 5

e und log

Manches wächst exponentiell: Bakterien, Bevölkerung, Onkel Dagoberts Geld. Was bedeutet das eigentlich mathematisch? Eine gute Gelegenheit, neben unermesslichen Reichtum durch echt coole Schneeballsystem-Geschäftsmodelle auch über Logarithmen und deren Gesetze zu reden.

5.1 Testen Sie sich selbst!

Wo stehe ich?

Schauen Sie sich den Selbsttest an: Wissen Sie über Exponentialfunktionen und Logarithmen bereits Bescheid, können Sie das Kapitel überblättern.

1. Der gefürchtete Spinatbazillus vom Planeten Tau Ceti III vermehrt sich pro Stunde um den Faktor 1,6. Auf welche Größe wächst eine Population von anfangs 100 Exemplaren innerhalb von 5 Stunden?
2. Die Bank Schenk & Sohn verzinst mein Tagesgeldkonto mit einer Einlage in Höhe von 1 220 Euro jährlich mit 1,2 %. Auf welchen Betrag wächst mein Kontostand in 4 Jahren (inklusive Zinseszins)?
3. Beherrschen Sie die folgenden Rechenregeln?
   a) $\ln(a^b) = ?$
   b) $\lg(100) - \lg(10) = ?$
   c) $\ln(x) / \ln(10) = ?$

5.2 Mehr, mehr, mehr!

In der Biologie gibt es Vermehrungsvorgänge, die mit Potenzfunktionen wie x^n nicht beschrieben werden können, sondern »schneller über alle Maßen« wachsen. Denken Sie an Einzeller, die sich (im Schnitt) nach einer festen Zeitspanne teilen. Zuerst ist es einer, dann sind es zwei, vier, acht ... und nach kurzer Zeit dermaßen krass viele, dass sich die Viecher hoffentlich nicht irgendwo in Ihrem Körper befinden und schlimme Dinge mit lebenswichtigen Organen anstellen.

Stets gilt, dass sich ein Funktionswert proportional vervielfacht, wenn Sie x um einen Wert a erhöhen. Mathematisch ausgedrückt:

$$f(x + a) = c \cdot f(x)$$

Es gibt eine Klasse von Funktionen, für die dieses Verhalten gilt, nämlich *Exponentialfunktionen*. Das sind Funktionen, in denen x als Exponent einer Potenz vorkommt. Zum Beispiel:

$$f(x) = b^x$$

Wenn Sie für x einmal $x+a$ einsetzen, erhalten Sie:

$$f(x + a) = b^{x+a} = b^x \cdot b^a$$

Da b^a ein konstanter Faktor ist, erfüllt diese *Exponentialfunktion* die obige Proportionalitätsbedingung und tritt an die Stelle des c. Man spricht von *exponentiellem Wachstum*.

Aber was nehmen Sie für diese ominöse Basis *b*? Im Grunde hängt das von den Randbedingungen ab. Eine ganz bestimmte Basis jedoch spielt eine Sonderrolle. Nämlich:

Eulers Zahl

Wenn Sie als Basis b die *eulersche Zahl* $e = 2{,}71828\ldots$

verwenden, erhalten Sie die *natürliche Exponentialfunktion*, die dermaßen viele besondere Eigenschaften hat, dass sie in diesem Buch noch an vielen prominenten Stellen vorkommen wird.

Damit Sie sich diese spezielle Exponentialfunktion besser vor Augen halten können, zeichnen Sie einen Graphen. Setzen Sie dafür Sage ein:

```
plot(exp(x),x,xmin=-2,xmax=2)
```

Das Ergebnis zeigt Abbildung 5.1. Sie sehen, dass die Kurve die y-Achse bei 1 schneidet. Da $b^0 = 1$ natürlich für jede Basis gilt, auch für e, wird Sie das nicht verwundern. Hinzu kommt, dass der Graph nie die x-Achse berührt, streng monoton steigt und bei $x = 1$ den Wert e annimmt.

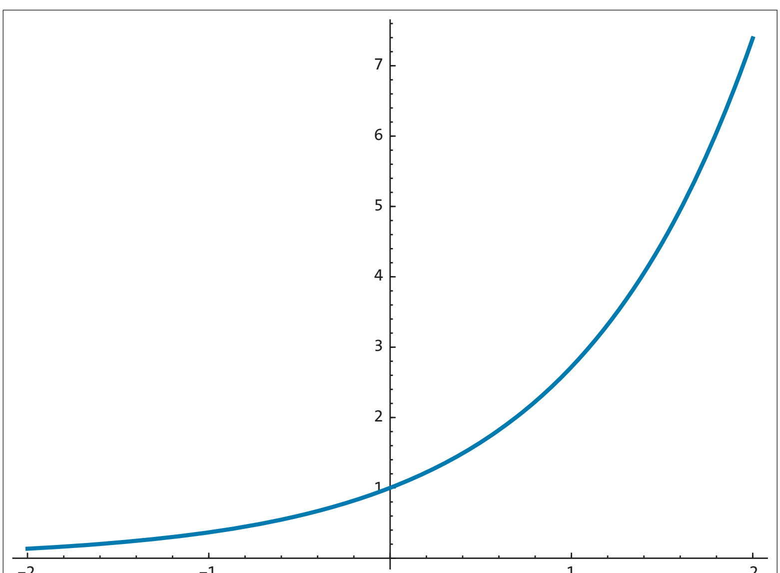

Abbildung 5.1 Die natürliche Exponentialfunktion, geplottet mit Sage im Bereich von [−2 .. 2]

Die Zahl e ist irrational, lässt sich also nicht als Bruch darstellen, genauso wenig wie $\sqrt{2}$ oder π, ist also $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Warum e so eine besondere Bedeutung für die Mathematik hat, verrate ich Ihnen in den Kapiteln über Analysis, damit es spannend bleibt.

Leonhard Euler

Der Schweizer Mathematiker und Physiker Leonhard Euler lebte von 1707 bis 1783. Er arbeitete die meiste Zeit in St. Petersburg, aber auch 25 Jahre lang in Berlin unter dem »Alten Fritz« (Kaiser Friedrich II), bis die beiden sich zerstritten.

Abbildung 5.2 Leonhard Euler bei der Arbeit (Porträt von Jakob Emanuel Handmann, Quelle: Wikimedia, gemeinfreies Bild)

Weniger bekannt ist, dass Euler im Alter von 64 Jahren erblindete und trotzdem weiterarbeitete. Tatsächlich führte Euler viele der noch heute üblichen Schreibweisen der Analysis ein und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker überhaupt. In der Physik begründete er die Kreiseltheorie und wandte seine Erkenntnisse über Funktionen und Differentialrechnung auf mechanische Probleme an.

Auch ein Krater im lunaren Mare Imbrium wurde nach ihm benannt, obwohl die beiden einander wirklich nicht sehr ähnlich sehen.

Bisher haben Sie als Exponenten in Potenzen nur rationale Zahlen verwendet, die Exponentialfunktion erweitert den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}$. Glücklicherweise funktionieren alle Potenzgesetze (Abschnitt 2.4) trotzdem. Das bedeutet nicht zuletzt, dass Sie Exponentialfunktionen beliebiger Basis b auf solche mit Basis e zurückführen können:

$b^x = (e^c)^x = e^{cx}$, wobei $e^c = b$ ist.

Eine andere häufige Schreibweise ist die mit dem abgekürzten Namen »(Exp)onentialfunktion«:

$$\exp(c)^x = \exp(cx)$$

Ein konkretes, in der Natur beobachtetes Wachstum unterscheidet sich in seinen Parametern: Anfangswert und Wachstumsrate.

Da $e^0 = 1$ ist, entspricht der Anfangswert genau dem Funktionswert für $x = 0$. Man kann ihn als Anfangswert f_0 eines Wachstumsvorgangs auffassen, wenn x sich zeitlich ändert:

$$f(x) = f_0 \exp(kx)$$

Die Geschwindigkeit des Wachstums stellt ein Faktor k vor dem x dar. Je größer, umso schneller das Wachstum.

Um klarzustellen, dass es sich um einen zeitlichen Vorgang handelt, verwenden wir t statt x als Bezeichnung für die Variable und stellen folgende allgemeine Wachstumsgleichung auf:

$$f(t) = f_0 \exp(kt)$$

Diese Funktion lässt sich zum Beispiel auf den berüchtigten Bazillus aus dem Selbsttest anwenden.

Beispiel: Der Spinatbazillus

Um eine exponentielle Wachstumsfunktion eindeutig zu bestimmen, benötigen Sie zwei Werte: den Anfangswert f_0 (identisch mit $f(0)$, also dem Wert zum Anfangszeitpunkt $t = 0$) und die Wachstumskonstante k.

Bei der Beispielaufgabe steht glücklicherweise beides schon da:

$$f(0) = 100$$

Verwenden Sie die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion, den natürlichen Logarithmus, um aus der angegebenen Wachstumsrate die Wachstumskonstante zu erhalten:

$$k = \ln 1{,}6\ \mathrm{h}^{-1} \approx 0{,}47\ \mathrm{h}^{-1}$$

Dabei steht h^{-1} für »pro Stunde«. In vielen naturwissenschaftlichen Schriften verkneift man sich die umständliche Schreibweise als Bruch mit dem h für lateinisch »hora« im Nenner und setzt lieber einen Exponenten von –1 oben dran, was natürlich dasselbe bedeutet. Weiteres zum wichtigen Thema »Maßeinheiten« finden Sie in Kapitel 7. In diesem Beispiel lassen wir sie der Übersicht halber weg.

Dass k tatsächlich der angegebene Faktor 1,6 für das stündliche Wachstum ist, erkennen Sie, wenn Sie einmal $t = 1$ einsetzen:

$$f(1) = f_0 \exp(\ln(1{,}6) \cdot 1) = f_0 \cdot 1{,}6$$

Die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus, daher heben beide einander auf. Falls Ihnen der ln im Moment nicht geläufig ist, ein klein wenig Geduld – ausführliche Erläuterungen folgen im nächsten Abschnitt 5.3. Für den Augenblick genügt es, wenn Sie mit einem Taschenrechner den ln von 1,6 berechnen können und wie bei mir ziemlich genau 0,47 herauskommt.

Da die Wachstumsfunktion jetzt vollständig bekannt ist, können Sie einfach die gefragten 5 Stunden aus der Aufgabe einsetzen:

$$f(5h) = 100 \cdot e^{0{,}47 \cdot 5} \approx 1048{,}557$$

Da von Bazillen die Rede ist, ergeben halbe Exemplare keinen Sinn, also runden Sie bitte auf die nächste ganze Zahl: 1049.

Beispiel: Zinseszins

Das nächste Beispiel ist zugegebenermaßen nicht besonders realistisch, aber auch bei Zinseszinsrechnung ist die Exponentialfunktion gefragt. Denn pro Jahr wächst Ihr Guthaben um einen bestimmten Faktor (1 plus Zinssatz) – und im nächsten Jahr wird dann dieses neue Guthaben verzinst, wächst also erneut um den gleichen Faktor. Es liegt also ein exponentieller Wachstumsvorgang vor, obwohl sich Ihr Geld natürlich bei Weitem nicht so schnell vermehrt wie der Spinatbazillus. Das liegt am deutlich niedrigeren Faktor k, wie Sie sofort sehen werden.

Die gegebenen Werte aus der Aufgabe sind:

$$f(0) = 1220$$

$$k = \ln(1 + p\%)\,\mathrm{a}^{-1} = \ln 1{,}012\,\mathrm{a}^{-1} \approx 0{,}0119\mathrm{a}^{-1}$$

Das a steht für die Zeiteinheit Jahre (lateinisch »annus«).

Gesucht ist der Kontostand nach 4 Jahren, also:

$$f(4) = 1220 \cdot e^{0{,}0119 \cdot 4} \approx 1279{,}62$$

Im Gegensatz zu Bazillen gibt es hier sinnvolle Nachkommastellen – runden Sie bei Geldbeträgen kaufmännisch auf volle Cent.

Weniger, aber niemals nichts

Wenn Sie den Graphen der Exponentialfunktion an der y-Achse spiegeln, wird aus Wachstum Verfall.

Beispiele dafür sind *Zerfallsvorgänge* wie etwa *Radioaktivität*, wo nach einer gewissen *Halbwertszeit* nur noch die Hälfte des Ausgangsmaterials verbleibt. Darauf basiert auch die wichtige *C14-Methode* der Altersbestimmung.

Beispiel: Die Radiokarbondatierung

Wenn Sie mal zufällig irgendwo in Sibirien ein Mammut ausbuddeln, liegt die Frage nach dessen Alter auf der Hand, bloß steht leider kein Herstellungsdatum drauf, ganz im Gegensatz zu einem Plastikbehälter, der in einigen Hunderttausend Jahren von unseren Nachfahren gefunden wird, aber das ist eine andere Geschichte. Zum Glück gibt es die C14-Methode.

Die Radiokarbondatierung funktioniert wie folgt: Wenn ein Organismus stirbt, hört er auf, Kohlenstoff aus der Umgebung in sein Gewebe einzubauen. Kohlenstoff enthält aber zu einem gewissen, sehr geringen Prozentsatz das radioaktive Isotop C14 (andere Schreibweise: ^{14}C). Da das Verhältnis zwischen C14 und »normalem« Kohlenstoff C12, dem (nicht radioaktiven) Isotop C13 und ebenjenem C14 konstant ist, kann man aus dem »Fehlen« von C14 in Überresten von Organismen schlussfolgern, wie lange sie schon tot sind. Denn C14 zerfällt mit einer *Halbwertszeit* von etwa 5730 Jahren zu Stickstoff (plus ein Elektron und ein Antineutrino, aber das muss uns hier nicht interessieren).

Die Halbwertszeit ist jene Zeit, nach der die Hälfte eines radioaktiven Materials zerfallen ist – und dieser Wert ist für jedes Isotop konstant.

Für den radioaktiven Zerfall gilt der exponentielle Zusammenhang mit negativem Exponenten:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$$

Dabei ist N_0 die Teilchenanzahl zum Zeitpunkt $t = 0$ und k die Zerfallskonstante. Natürlich ist die genaue Teilchenanzahl nicht bekannt, aber eben die Halbwertszeit, also jene Zeit, für die gilt:

$$\frac{1}{2} = \frac{N(t)}{N(0)} = e^{-kt}$$

Wenden Sie auf beiden Seiten dieser Gleichung den natürlichen Logarithmus an, um die e-Funktion loszuwerden:

$$\ln\frac{1}{2} = -kt$$

$$k \approx 0{,}693/t$$

Bei einer Halbwertszeit von 5730 Jahren ergibt sich:

$$k = 1{,}21 \cdot 10^{-4}$$

Übrigens entspricht diese Halbwertszeit nur wenigen Zerfällen pro Sekunde. Deshalb ist die C14-Methode umso ungenauer, je älter das zu untersuchende Material ist. Ist es älter als ungefähr 10 Halbwertszeiten, also 57 300 Jahre, ist der Anteil C14 zu klein, um noch gemessen werden zu können.

Dann doch lieber Aufdrucke auf Plastikverpackungen, finden Sie nicht?

5.3 Logarithmen und ihre Regeln

Gegensätze ziehen sich an, daher gibt es in der Mathematik für (so gut wie) jede Funktion eine andere, die das Gegenteil tut. Im Fall der Exponentialfunktion ist das der *Logarithmus*. Sie mussten ihn ja schon im letzten Abschnitt anwenden, jetzt reiche ich Ihnen ausführliche Erklärungen nach.

Der Logarithmus fragt: »Mit welcher Zahl muss ich meine Basis potenzieren, um den gewünschten Wert zu erhalten?«

Logarithmen zu verschiedenen Basen

Genau wie Exponentialfunktionen gibt es Logarithmen für jede Basis, die größer als 0 ist. Daher müssen Sie die verwendete Basis b unten rechts an das Kürzel $\log_b x$ setzen, um Missverständnisse zu vermeiden. Um sich bei den wichtigsten Basen Schreibarbeit zu sparen, gibt es Abkürzungen:

- **Natürlicher Logarithmus**

  $$\ln(x) \coloneqq \log_e x$$

- **Zehnerlogarithmus**

  $$\lg(x) \coloneqq \log_{10} x$$

- **Zweierlogarithmus**

  $\mathrm{ld}(x) \coloneqq \log_2 x$

Schauen Sie sich die folgenden einfachen Beispiele an:

$10^3 = 1000 \Rightarrow \log_{10}(1000) = 3$

$256 = 2^8 \Rightarrow \mathrm{ld}(256) = 8$

Der natürliche Logarithmus ist die Gegenfunktion zur Exponentialfunktion, also:

$\ln(e^x) = x$

$e^{\ln(x)} = x$

Dasselbe gilt für jede andere Basis, allgemein also:

$\log_b(b^x) = x$

$b^{\log_b(x)} = x$

Aus den Potenzgesetzen ergeben sich ein paar Regeln für Logarithmen:

1. Eine wichtige Eigenschaft ist, dass Logarithmen aus einem Produkt eine Summe machen können:

   $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

2. Der Logarithmus von 1 ist immer 0, da $b^0 = 1$ und der Logarithmus $\log_b(b) = 1$, da $b^1 = b$ ist.

   $\log_b(a^x) = x \cdot \log_b(a)$

   Speziell gilt für $x = -1$:

   $\log_b\left(\frac{1}{a}\right) = -\log_b(a)$

3. Wichtig ist, dass Sie (ähnlich wie bei Exponentialfunktionen) Logarithmen unterschiedlicher Basen ineinander umrechnen können. Das geht so:

   $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

Logarithmen zu verschiedenen Basen unterscheiden sich also nur durch einen konstanten Faktor voneinander. Das können Sie besonders leicht sehen, wenn Sie mehrere Logarithmen in ein und dasselbe Koordinatensystem zeichnen (Abbildung 5.3).

Um zu erkennen, zu welcher Basis eine Logarithmuskurve gehört, müssen Sie übrigens nur schauen, bei welchem x die Kurve die Gerade mit $y = 1$ schneidet, da $1 = \log_b(b)$ ist.

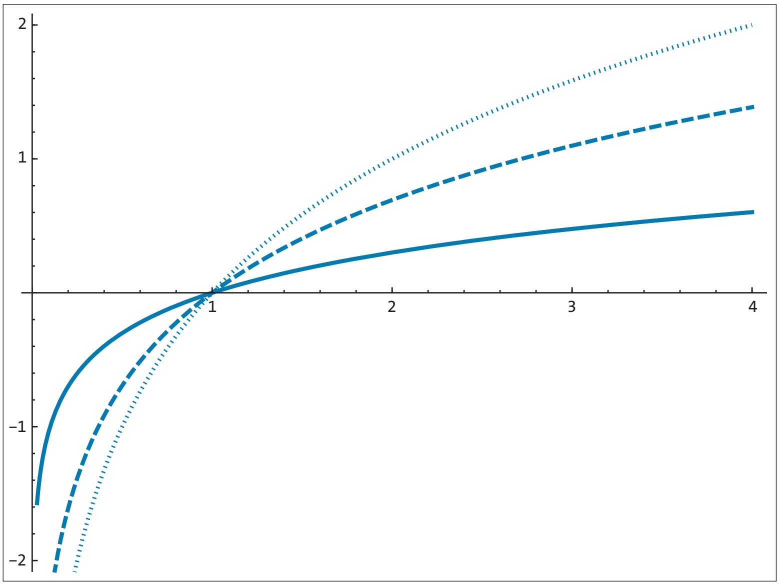

Abbildung 5.3 Logarithmenkurven unterscheiden sich nur durch einen Faktor. Sie sehen hier die Logarithmen zur Basis 2 (gepunktet), e (gestrichelt) und 10 (durchgezogen).

Logarithmen werden gerne zur Visualisierung von Zusammenhängen verwendet, deren Werte über mehrere Größenordnungen hinweg betrachtet werden sollen – aus Exponentialfunktionen werden dann Geraden (Abbildung 5.4). In der Natur kommen logarithmische Zusammenhänge beispielsweise bei der Empfindung von Schall und Helligkeit vor, außerdem sind Skalen wie der pH-Wert in der Chemie, die Richterskala in der Geologie und Sternhelligkeiten in der Astronomie logarithmisch.

Vor der Erfindung von Taschenrechnern dienten Rechenschieber oder Logarithmentafeln dazu, Multiplikationsaufgaben zu vereinfachen. Auch das Wurzelziehen wurde einfach, wenn man die Logarithmen betrachtete. Denn eine Quadratwurzel wird zu einem Faktor $\frac{1}{2}$, weil die Wurzel einer Potenz mit ebendiesem Exponenten entspricht. Das können Sie mit der 3. Regel von eben nachvollziehen:

$$\log_b(\sqrt{x}) = log_b\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log_b(x)$$

In den angewandten Naturwissenschaften werden Ihnen Logarithmen noch oft begegnen.

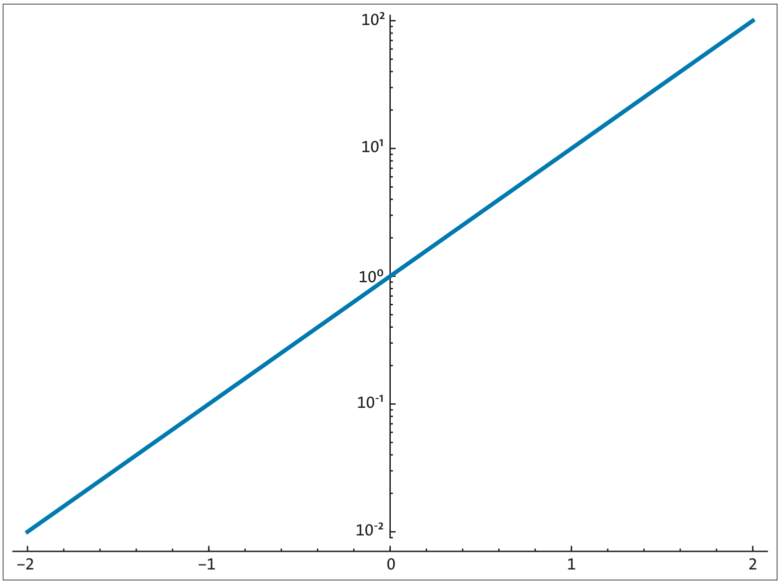

Abbildung 5.4 Die Exponentialfunktion $y = 10^x$ wird mit logarithmischer y-Achse zu einer Geraden. Das zugehörige Kommando für Sage lautet: plot(10^x,xmin=-2,xmax=2,ymax=100, scale='semilogy')

Aufgaben

5.4 Entspannungsübungen

Aufgabe 1: Wenden Sie die Potenzgesetze an.

a) $e^a \cdot e^b = ?$

b) $e^{a-b} = ?$

Aufgabe 2: Wenden Sie die C14-Methode an.

Der Kohlenstoff in der Atmosphäre enthält einen Anteil von 10^{-12} C14. In Überresten eines Wollhaarmammuts fand man einen Anteil von $6{,}02 \cdot 10^{-13}$. Wann verstarb das 6 Tonnen schwere Vieh? Verwenden Sie die Werte aus dem Beispiel in diesem Kapitel.

Aufgabe 3: Das Geheimnis unermesslichen Reichtums

Herr Oberschlau schickt an 5 Bekannte eine E-Mail mit folgendem Inhalt: »Überweise mir 1 Euro, dann sende identische Briefe an 5 Bekannte von dir.«

Angenommen, die Sache funktioniert: Nach ungefähr wie vielen Runden dieses Spiels knackt Herrn Oberschlaus Kontostand die Marke von einer Million Euro?

Aufgabe 4: Berechnen Sie.

a) $\log_5(625) = ?$

b) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = ?$

c) $\mathrm{ld}(16) = ?$

d) $\lg(2) + \lg(50) = ?$

Aufgabe 5: Noch mehr außerirdische Bazillen!

Der fürchterliche Kohlbazillus vom Planeten Tau Ceti III verzweifacht seine Population alle sieben Minuten. Nach welcher Zeit werden aus einer Population von 13 Exemplaren 832?

Hinweis: Nein, an dieser Aufgabe fehlt nicht versehentlich das Taschenrechner-Symbol, Sie können sie auch ohne ausrechnen!

Abbildung 5.5 Wie lang mag diese Szene her sein? (Quelle: Wikipedia, gemeinfrei)

Aufgabe 6: Eine Knobelaufgabe

Lösen Sie die folgende, nur auf den ersten Blick einfache Gleichung:

$$2^a + 2^{-a} = 4$$

5.5 Lösungen

Aufgabe 1

a) $e^a \cdot e^b = e^{(a+b)}$

b) $e^{a-b} = \frac{e^{\mathrm{a}}}{e^b}$

Aufgabe 2

Gegeben ist der normale Anteil C14 in der Atmosphäre:

$$N_0 = 10^{-12}$$

Außerdem der in einem Wollhaarmammut gefundene Anteil:

$$N = 6{,}02 \cdot 10^{-13}$$

Gesucht ist t, das Alter der Überreste.

Die C14-Methode funktioniert – für unsere Zwecke stark vereinfacht – so, dass wir die C14-Konzentrationen in der Atmosphäre und in biologischen Überresten ins Verhältnis setzen:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-kt}$$

Stellen Sie die Formel um nach dem gesuchten t:

$$\ln\frac{N}{N_0} = -kt$$

$$t = -\frac{1}{k} \cdot \ln\frac{N}{N_0} = -\frac{1}{k} \cdot \ln\left(6{,}02 \ \cdot \frac{10^{-13}}{10^{-12}}\right)$$

$$= -\frac{1}{k} \cdot \ln\left(6{,}02 \cdot 10^{(-13+12)}\ \right)$$

$$= -\frac{1}{k} \cdot \ln 0{,}602$$

Dabei ist laut Unterabschnitt »Weniger, aber niemals nichts« am Ende von Abschnitt »Eulers Zahl« auf Seite 112:

$$k = 1{,}21 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{a}^{-1}$$

Der Taschenrechner liefert als Ergebnis:

$$t \approx 4190\ \mathrm{a}$$

Achten Sie darauf, dass Sie nicht mehr signifikante Stellen angeben als die Messwerte haben, in diesem Fall 3. Runden Sie also auf Jahrzehnte – genauer ist das Alter des Mammuts nicht zu ermitteln.

Aufgabe 3

Schneeballsysteme funktionieren nicht, weil nicht genug Leute blöd genug sind mitzumachen. Die Beispielaufgabe zeigt ein ziemlich vereinfachtes System, auf das nun wirklich niemand hereinfällt. Wir rechnen trotzdem mal nach:

Herr Oberschlau erhält in der ersten Runde 5 Euro, dann 25 Euro (5^2), dann 125 Euro (5^3) und so weiter.

Gegeben: Die Basis des exponentiellen Wachstums ist $b = 5$. Der gewünschte Kontostand ist $K = 10^6 = 1000000$, also eine Million.

Gesucht ist jener Exponent r (Rundenanzahl), für den der Rundenbetrag (genauer: die Summe der Rundenbeträge) K überschreitet.

Ansatz ist die exponentielle Wachstumsgleichung:

$$K(r) = 5^r$$

Diese Potenz soll größer als K sein. Nehmen Sie den Logarithmus zur Basis 5:

$$r > \log_5 K$$

Rechnen Sie das um in den natürlichen Logarithmus:

$$r > \frac{\ln K}{\ln 5}$$

Setzen Sie die Million für K ein, erhalten Sie:

$$r > 8{,}6$$

Nach 9 Runden ist also die Million garantiert geknackt. Falls Sie sich jetzt hinsetzen und ein solches Projekt starten, schulden Sie mir einen angemessenen Anteil am Gewinn! Sagen wir fifty-fifty?

Aufgabe 4

a) $\log_5(625) = \log_5(25 \cdot 25) = \log_5 25 + \log_5 25 = 2 + 2 = 4$

b) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln e^{-1} = -\ln e = -1$

c) $\mathrm{ld}(16) = \mathrm{ld}(2^4) = 4$

d) $\lg(2) + \lg(50) = \lg(2 \cdot 50) = \lg 100 = 2$

Aufgabe 5

Gegeben ist die Zeitspanne min $T_2 = 7$, die die Kohlbazillen benötigen, um ihre Anzahl zu verdoppeln. Ferner ist die Anfangspopulation gegeben als $N_0 = 13$ sowie die Zielpopulation $N_1 = 832$.

Gesucht ist die Zeitspanne T, nach der die Zielpopulation erreicht ist.

Der Ansatz ist einmal mehr ein Exponentialansatz, dessen Wachstumsfaktor k unbekannt ist. Zunächst schreiben wir hin, was wir wissen, nämlich die Verdoppelung der Population im Zeitraum T_2:

$$\frac{2N}{N} = e^{kT_2}$$

$$2 = e^{kT_2} \quad |\ln$$

$$\ln 2 = k\,T_2 \quad |:T_2$$

$$k = \frac{\ln 2}{T_2}$$

Sie müssen den Wert jetzt nicht sofort numerisch ausrechnen, damit handeln Sie sich bloß Ungenauigkeiten durch Rundung ein.

Schreiben Sie den Exponentialansatz noch einmal für die Zielpopulation hin:

$$\frac{832}{13} = e^{\ln 2 \cdot \frac{T}{T_2}}$$

Gemerkt? Den Bruch links kann man ausrechnen, er hat den Wert 64.

Wenden Sie den Logarithmus beidseitig an, um T isolieren zu können. Dann dividieren Sie durch alles, was nicht T ist:

$$\ln 64 = \ln 2 \cdot \frac{T}{T_2} \quad |: \frac{\ln 2}{T_2}$$

$$T = T_2 \frac{\ln 64}{\ln 2}$$

Tatsächlich ist das eine Art Verhältnisgleichung: Die gesuchte Zeit T verhält sich zur Verdoppelungsdauer T_2 wie die natürlichen Logarithmen der Wachstumsfaktoren, also:

$$\frac{T}{T_2} = \frac{\ln 64}{\ln 2}$$

Tatsächlich entspricht ja jenes Logarithmenverhältnis durch Basisumrechnung dem Logarithmus von 64 zur Basis 2, also ld(64) oder $\log_2(64)$:

$$T = T_2 \cdot \log_2(64)$$

Der Zweierlogarithmus von 64 ist 6, da $2^6 = 64$ ist. Also müssen Sie nur rechnen:

$$T = 7 \text{ min} \cdot 6 = 42 \text{ min}$$

Der Kohlbazillus von Tau Ceti III hat also nach 42 Minuten eine Population von 832 Individuen erreicht. Guten Appetit!

Aufgabe 6

Die Gleichung lässt sich am einfachsten lösen, wenn Ihnen auffällt, dass der zweite Summand das Reziproke des ersten ist, also:

$$2^a + \frac{1}{2^a} = 4$$

Mit einem kleinen Stellvertreter-Trick wird die weitere Lösung handlicher. Begrüßen Sie x als Stellvertreter für die a-te Potenz von 2! Dann sieht die Gleichung so aus:

$$x + \frac{1}{x} = 4$$

Da x sicher nicht 0 ist, dürfen Sie beide Seiten mit x multiplizieren und erhalten eine quadratische Gleichung:

$$x^2 + 1 = 4x$$

Der Lösungsansatz hierfür ist eine quadratische Ergänzung zur zweiten binomischen Formel mit $(x - 2)^2$:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 = (x - 2)^2 - 3 = 0$$

Es gibt zwei Lösungen, und zwar:

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Jetzt hat der Stellvertreter x ausgedient, und Sie schreiben wieder die Potenz hin:

$$2^a = 2 \pm \sqrt{3}$$

Nehmen Sie auf beiden Seiten den Logarithmus zur Basis 2:

$$a = log_2\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

Wenn Sie möchten, können Sie den dualen Logarithmus noch in den natürlichen umrechnen:

$$a = \frac{ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)}{ln2}$$

Das ist aber ein unnötiger Rechenschritt aus einer Zeit, in der urtümliche Taschenrechner (wenn überhaupt) nur natürliche Logarithmen berechnen konnten. Letztlich kommt es hier auch nicht auf die Zahlenwerte an, sondern auf den richtigen Riecher für die Umformungen und die Kenntnis der Potenz- und Logarithmenregeln – und die kennen Sie jetzt ja in- und auswendig!

Kapitel 19

Die Bewegungsgleichung

Willkommen in der Physik des Alltags! Es ist Zeit, genauer zu untersuchen, wieso Newton ein Apfel auf den Kopf fiel. Mit anderen Worten: Wir integrieren die allgemeine Bewegungsgleichung!

19.1 Kraft und Beschleunigung

Bereits Sir Isaac Newton erkannte das *Aktionsprinzip*, das besagt, dass die Bewegung sich proportional zur einwirkenden Kraft F ändert. Heute nennen wir dies respektvoll das *zweite newtonsche Gesetz* und schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \sim F$$

Dabei ist mit v die Geschwindigkeit gemeint, das Zeichen ~ bedeutet »ist proportional zu«.

Im Moment betrachten wir lediglich eine Dimension (z. B. die Vertikale), das Gesetz funktioniert aber auch in den drei Raumdimensionen unserer Welt.

Für zeitliche Ableitungen verwenden Physiker üblicherweise einen Punkt als Abkürzung und schreiben:

$$\dot{v} \sim F$$

Die Änderung der Geschwindigkeit (die *Beschleunigung a*) ist also proportional zur wirkenden Kraft.

Daraus ergibt sich eine ganze Reihe wichtiger Schlussfolgerungen.

Kraftlos

Wohlgemerkt bewirkt eine Kraft also eine Änderung der *Geschwindigkeit*.

Wenn keine Kraft wirkt, ändert sich die Geschwindigkeit nicht. Deshalb ergibt es (zumindest in einer idealen Welt) überhaupt keinen Sinn, im Zug unbedingt so herum sitzen zu wollen, dass man vorwärts schaut. Schließen Sie mal die Augen in einem Zug, der mit konstanter Geschwindigkeit vor sich hin rollt. Sie werden keine Bewegung in irgendeine Richtung spüren, geschweige denn merken, ob Sie vor- oder rückwärts fahren. Unser Körper kann nur Beschleunigungen wahrnehmen, keine Geschwindigkeiten.

Daraus folgt messerscharf, dass es so etwas wie eine Nullgeschwindigkeit, also einen absoluten Stillstand, überhaupt nicht geben kann. Wir können lediglich davon sprechen, dass sich zwei Objekte *relativ zueinander* nicht bewegen (z. B. Zug und Bahnsteig beim Halt im Bahnhof).

Wenn Sie in einem fahrenden Zug einen Ball fallen lassen, fällt er relativ zum Zug senkrecht nach unten, nicht relativ zur Landschaft.

Erst wenn der Zug bremst (oder beschleunigt), spüren Sie eine Kraft, und nur dann fällt der Ball nicht senkrecht.

Bleiben wir aber zunächst beim »kraftlosen« Fall. Wenn die Kraft 0 ist, gilt:

$$\dot{v} = 0$$

Dies ist eine Gleichung, die Sie auf beiden Seiten integrieren können (soweit nicht anders erwähnt, integrieren wir immer nach der Zeit dt).

Da sich Integral und Ableitung aufheben, bleibt links die Geschwindigkeit stehen. Rechts steht das Integral über 0 – eine passende Stammfunktion ist $f(t) = k$.

Das sieht dann sehr übersichtlich aus:

$$v(t) = k$$

Integrationskonstanten, wie hier das k, lassen sich immer aus Randbedingungen ablesen. In diesem Fall ist k die konstante Geschwindigkeit, die beispielsweise zum Zeitpunkt $t = 0$ gemessen werden könnte. Lassen Sie uns die Konstante entsprechend umbenennen:

$$v(t) = v_0$$

Sie wissen, dass die Geschwindigkeit die zeitliche Ableitung der zurückgelegten Strecke s ist. Sie können also auf der linken Seite schreiben:

$$\dot{s}(t) = v_0$$

Integrieren Sie diese Gleichung erneut! Sie erhalten:

$$s(t) = \int v_0 \, \mathrm{d}t = v_0 t + s_0$$

Die neue Integrationskonstante s_0 ist dabei der Anfangsort, also $s(t) = 0$. Das sehen Sie sofort, wenn Sie für $t = 0$ einsetzen.

Natürlich kennen Sie diese Gleichung schon, Sie haben sie zigmal benutzt, um auszurechnen, wie lange Sie von einem Ort zum anderen benötigen. Bloß haben wir sie jetzt aus Newtons zweitem Gesetz durch zweimalige Integration hergeleitet.

Konstante Kraft

Jetzt lassen wir mal eine Kraft auf unser Testobjekt wirken. Dazu bringen wir den bislang vernachlässigten Faktor des proportionalen Zusammenhangs zwischen Kraft F und Beschleunigung a ins Spiel. Das ist, Sie ahnen es schon, die Masse m:

$$F = m \cdot a$$

Das ist die *Grundgleichung der Mechanik*. Sie zweimal zu integrieren, ist die nächste Aufgabe. Dazu ersetzen wir gleich mal die Beschleunigung durch die zweite Ableitung des Ortes:

$$m\,\ddot{s} = F$$

Bringen Sie die Masse auf die rechte Seite, und integrieren Sie die Gleichung:

$$\dot{s}(t) = v(t) = \frac{F}{m}t + v_0$$

Und gleich noch einmal:

$$s(t) = \frac{F}{2m}t^2 + v_0 t + s_0$$

Das ist die Bewegungsgleichung für ein Objekt der Masse m, das einer konstanten Kraft F ausgesetzt ist.

Beispiel: Der Zug fährt an

Eine Güterzuglok der Baureihe 194 (»deutsches Krokodil«) hat eine Anfahrzugkraft von 262 kN (Kilonewton). Wie lange braucht die Lok, um einen Güterzug mit 1 000 Tonnen Gewicht (Lok eingerechnet) auf 30 km/h zu beschleunigen?

Da diese Aufgabe nicht nach dem zurückgelegten Weg fragt, genügt es, die erste Integration der Grundgleichung zur Hand zu nehmen:

$$v(t) = \frac{F}{m}t$$

Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist 0, diese Konstante entfällt also.

Stellen Sie die Gleichung nach der Zeit um:

$$t = \frac{v(t)\,m}{F}$$

Setzen Sie die Werte ein, und beachten Sie die Umrechnung von km/h nach m/s: Ein Stundenkilometer sind $\frac{1000}{3600}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Nur mit Standardeinheiten kommt das richtige Ergebnis in Sekunden heraus!

$$t = \frac{30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 1000\ \mathrm{t}}{262\ \mathrm{kN}} = \frac{30 \cdot \frac{1000}{3600}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1 \cdot 10^6\mathrm{kg}}{2{,}62 \cdot 10^5\mathrm{N}} \approx 31{,}8\ \mathrm{s}$$

Der Fall des Apfels

Kommen wir nun zu Newtons Kopf bzw. dem Apfel, der darauf gefallen sein soll. Wahlweise können Sie auch Ihr Handy zu Boden fallen lassen oder vielleicht doch lieber eine Murmel. Wichtig ist nur, dass wir den Luftwiderstand für den Moment außer Acht lassen wollen.

Auf den fraglichen Gegenstand wirkt die Gravitationskraft, die nahe der Erdoberfläche einer einfachen Formel gehorcht:

$$G = -mg$$

Dabei ist g die Erdbeschleunigung mit einem Wert von 9,81 m/s^2.

Achten Sie auf das negative Vorzeichen!

Unser Koordinatensystem ist so eingerichtet, dass der Fußboden der Höhe h=0 entspricht und die positive Richtung nach oben zeigt. Deshalb wirkt die Schwerkraft nach unten, hat also ein negatives Vorzeichen.

Die Bewegungsgleichung sieht jetzt (mit h statt s und G statt F) so aus:

$$h(t) = \frac{1}{2}\frac{G}{m}t^2 + v_0 t + h_0$$

Auch hier gibt es wieder eine (vertikale) Anfangsgeschwindigkeit und eine Anfangshöhe h_0.

Setzen Sie G ein!

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$$

Die Masse kürzt sich weg! Deshalb fallen verschieden schwere Gegenstände genau gleich schnell zu Boden – vorausgesetzt natürlich, der Luftwiderstand ändert nichts daran, was er in der realen Welt natürlich oft tut.

Beispiel: Der Apfel fällt nicht weit vom Stamm

Angenommen, ein Apfel fällt aus einer Höhe von 3 m zu Boden. Wie lange dauert es, bis er auf dem Boden auftrifft?

Anhand der gegebenen Anfangsbedingungen erkennen Sie, dass die Anfangsgeschwindigkeit 0 ist. Gegeben sind die Anfangshöhe h_0 = 3m und die Zielhöhe $h(t)$ = 0. Gesucht ist die zugehörige Zeit t.

Die Bewegungsgleichung sieht also so aus:

$$0 = -\frac{g}{2}t^2 + 3\ \mathrm{m}$$

Stellen Sie die Gleichung nach t um, erhalten Sie:

$$t = \sqrt{\frac{6\ \mathrm{m}}{g}} \approx 0{,}8\ \mathrm{s}$$

Der Fall dauert also ganze 0,8 Sekunden. Wohlgemerkt unabhängig von der Masse des Apfels, die weder gegeben war noch für die Rechnung gebraucht wurde.

19.2 Die zweite Dimension

Alle bisherigen Beispiele betrafen nur eindimensionale Bewegungen.

Zum Glück ist es ganz einfach möglich, alles auf zwei oder drei Dimensionen zu übertragen.

Denn: Das *Superpositionsprinzip* der klassischen Mechanik besagt, dass Bewegungen in jeder der drei Dimensionen einander nicht beeinflussen.

Sie können also beispielsweise die horizontale und die vertikale Bewegung eines Körpers voneinander unabhängig betrachten. Genau das steht als Nächstes auf unserem Programm!

Nur einen Steinwurf entfernt

Ob es Newton auch so inspiriert hätte, wenn ihm der Lausbub von nebenan einen Stein an den Kopf geschmissen hätte?

Die Antwort auf diese Frage bleiben wir mal schuldig. Trotzdem betrachten wir jetzt die Bewegungsgleichung eines *Wurfs*.

Das ist natürlich eine Bewegung in zwei Dimensionen. Die dürfen wir unabhängig voneinander betrachten. Beginnen wir mit der Vertikalen:

$$h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{h_0}t$$

Dabei soll v_{h_0} die vertikale Komponente der Geschwindigkeit sein, mit der der Stein die Hand des Werfers verlässt. Die Anfangshöhe h_0 entspricht ziemlich genau der Körpergröße des Werfers, aber wir setzen sie einfach mal gleich 0, weil der Stein sicher deutlich weiter fliegt, als der Werfer groß ist – eine großzügige, aber plausible Vereinfachung.

Kommen wir zur horizontalen Bewegung. Mit der hat die Schwerkraft nix am Hut! Die Gleichung sieht also viel einfacher aus:

$$s(t) = v_{s_0}t$$

Die Integrationskonstante v_{s_0} ist die Anfangsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung. Wenn wir den Werfer an die Position $s = 0$ stellen, entfällt die Konstante s_0.

Versuchen Sie mal herauszufinden, wann der Stein auf den Boden aufschlägt. Dazu setzen Sie die Höhengleichung gleich null:

$$0 = -\frac{g}{2}t^2 + v_{h_0}t$$

Sie sehen, dass diese Gleichung zwei Lösungen hat: Nämlich $t = 0$ (der Moment des Abwurfs) und eine zweite, und das ist die, die wir suchen. Sie erhalten wir nach Division durch t und Umstellen der Gleichung:

$$0 = -\frac{g}{2}t + v_{h_0}$$

$$t = \frac{2v_{h_0}}{g}$$

Aber wie weit ist der Stein in dieser Zeit geflogen?

Nun, Sie können den gefundenen Zeitpunkt des Aufpralls ja mal in die horizontale Bewegungsgleichung einsetzen. Dann erhalten Sie:

$$s = 2\frac{v_{s_0}v_{h_0}}{g}$$

Das ist ein Ausdruck für die Flugweite, der nur von den beiden Geschwindigkeitskomponenten abhängt. Angenommen, die sind beide 10 m/s, dann kommt heraus:

$$s = 2\frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

$$= \frac{200}{9{,}81}\,\mathrm{m} \approx 20\ \mathrm{m}$$

Die Wurfparabel

Wie sieht für einen seitlich stehenden Zuschauer die Bahn aus, die der geworfene Stein beschreibt? Die Entfernung wird dann an der x-Achse, die Höhe an der y-Achse abgetragen. Dazu müssen wir die Höhe in Abhängigkeit von der zurückgelegten Entfernung ausdrücken. Die Entfernung wird dann an der x-Achse, die Höhe an der y-Achse abgetragen.

Das lässt sich bewerkstelligen, indem wir die Zeit aus den beiden Bewegungsgleichungen eliminieren.

Zur Erinnerung noch einmal die Höhenformel:

$$h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{h_0}t$$

Und die Weite:

$$s(t) = v_{s_0}t$$

Stellen Sie die zweite Gleichung nach t um.

$$t = s/v_{s_0}$$

Setzen Sie dies in die Höhenformel ein:

$$h(s) = -\frac{g}{2v_{s_0}^2}s^2 + \frac{v_{h_0}}{v_{s_0}}s$$

Die Entfernung s ist jetzt die neue unabhängige Variable.

Sie sehen sofort, dass es sich um eine nach unten offene Parabel handelt, denn die Funktionsvorschrift enthält das Quadrat von s mit einem negativen Vorzeichen.

Der optimale Wurfwinkel

Haben Sie sich auch schon mal gefragt, in welchem Winkel Sie einen Stein am besten werfen, damit er (bei immer gleichem Betrag der Abwurfgeschwindigkeit) so weit fliegt wie möglich?

Letztlich ist das nichts anderes als eine Extremwertaufgabe. Sie müssen nur irgendwie den Winkel ins Spiel bringen.

Tatsächlich können Sie die beiden Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit als Seiten eines Dreiecks auffassen, dessen Öffnungswinkel der Abwurfwinkel ist (Abbildung 19.1).

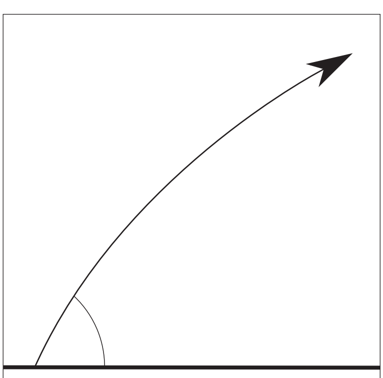

Abbildung 19.1 Der Abwurfwinkel ist der Öffnungswinkel eines Dreiecks.

Wenn der Betrag der Abwurfgeschwindigkeit v_0 ist, so gelten einfache trigonometrische Zusammenhänge mit der horizontalen und vertikalen Geschwindigkeitskomponente und dem Wurfwinkel α:

$$v_{h_0} = v_0 \sin \alpha$$

$$v_{s_0} = v_0 \cos \alpha$$

Die Wurfweite war ja:

$$s = 2 \frac{v_{s_0} v_{h_0}}{g}$$

Setzen Sie die beiden Geschwindigkeitskomponenten ein, um die Abhängigkeit der Wurfweite vom Winkel zu bekommen:

$$s(\alpha) = \frac{2}{g} v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Diese Funktion sieht etwas einfacher aus, wenn Sie sich an eine Formel aus Kapitel 6 erinnern:

$$s(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Um das Maximum dieser Funktion zu finden, bilden Sie in bewährter Weise zunächst die erste Ableitung nach α. Dazu müssen Sie die Kettenregel einsetzen; die innere Funktion ist 2α, und ihre Ableitung nötigt uns einen Faktor 2 auf:

$$s'(\alpha) = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\alpha$$

Diese Funktion kann nur 0 sein, wenn der Cosinus 0 ist. Das ist der Fall für einen Winkel von 90°. Also ist α= 45°.

Die zweite Ableitung beschert uns einen negativen Sinus und damit eine Rechtskurve – also ist die gefundene Nullstelle der ersten Ableitung tatsächlich ein Maximum. Aus schmerzvoller Erfahrung wissen Sie sicher, dass die Ränder – also Abwurfwinkel 0° oder 90° – keinesfalls bessere Weiten erzielen, also ist der gesuchte optimale Abwurfwinkel tatsächlich 45°.

Beispiel: Der Prager Fenstersturz

Kein schönes Kapitel der europäischen Geschichte: Im Jahr 1618 begann der Dreißigjährige Krieg, weil in Prag einige Würdenträger aus dem Fenster der Burg geworfen wurden.

Übrigens überlebten alle vier Opfer den Sturz, was man von den unzähligen Kriegstoten nicht behaupten kann.

Das Beispiel ist Ihnen zu morbide? Na gut. Dann werfen Sie eben einen Apfel aus der Prager Burg, die Masse ist ja egal, wie wir wissen. Werfen Sie den Apfel horizontal mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 1 m/s. Wenn es vom Fenster aus 18 Meter in die Tiefe geht, in welcher Entfernung zur Mauer landet der Apfel?

Fertigen Sie sich bei geometrischen Aufgaben immer eine Skizze an (Abbildung 19.2)!

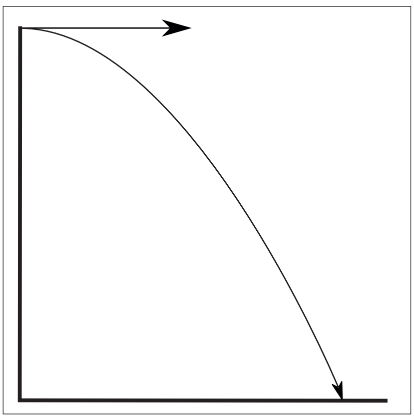

Abbildung 19.2 Der Schubser aus dem Fenster führt zu einer Wurfparabel, deren Nullstelle der gesuchte Aufschlagpunkt ist.

Die Wurfparabel-Funktion ist in diesem Fall diese:

$$h(s) = -\frac{g}{2v_{s_0}^2}s^2 + h_0$$

Der Term $\frac{v_{h_0}}{v_{s_0}}s$ entfällt, weil die vertikale Anfangsgeschwindigkeit 0 ist. Dafür gibt es eine Anfangshöhe h_0. Für die horizontale Schubsgeschwindigkeit schreiben wir jetzt nur noch v.

Um den Aufschlagpunkt zu finden, müssen Sie die Nullstelle bestimmen. Also setzen Sie obige Funktion gleich null:

$$-\frac{g}{2v^2}s^2 + h_0 = 0$$

Wenn Sie die Gleichung umformen, erhalten Sie eine allgemeine Formel für die Wurfweite.

$$s = \sqrt{\frac{2v^2h_0}{g}}$$

Setzen Sie die gegebenen Werte ein. Da die alle in Standardeinheiten vorliegen, müssen Sie nichts umrechnen, und es kommen Meter heraus.

$$s = \sqrt{\frac{2 \cdot 1^2 \cdot 18}{9}}\,\mathrm{m} = \sqrt{\frac{36}{9}}\,\mathrm{m} = \sqrt{4}\,\mathrm{m} = 2\mathrm{m}$$

Aufgaben

19.3 Entspannungsübungen

Aufgabe 1: Weg mit dem Schrott!

Ihr PC ist abgestürzt! Ihnen platzt der Kragen. Weg mit dem Schrott!

Sie schmeißen die Kiste mit voller Kraft waagerecht aus dem Fenster im dritten Stock (h = 10m) und treffen genau den Müllcontainer auf der anderen Straßenseite (s = 5m).

Berechnen Sie den Betrag der Anfangswurfgeschwindigkeit.

Aufgabe 2: Her mit dem Schrott!

Ein mit Schrott beladener Kleinlastwagen ist mit 90 km/h auf einer Landstraße unterwegs, als sich die Ladetür öffnet. Ein defektes Bügeleisen fliegt mit einer Geschwindigkeit von 0,5 m/s aus einer Höhe von 1 m nach hinten aus dem Fahrzeug. Wie weit hinter dem Lastwagen trifft das Bügeleisen auf den Boden? Hinweis: Lassen Sie den Luftwiderstand außer Acht.

19.4 Lösungen

Aufgabe 1

Auch für diese Aufgabe gilt: Eine Skizze hilft!

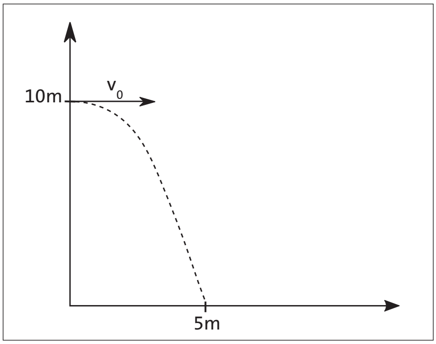

Abbildung 19.3 Die Skizze zeigt die gegebenen Werte und die gesuchte Anfangswurfgeschwindigkeit.

Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Höhe h und die Weite x auf.

$$h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h_0$$

$$x(t) = v_0 t$$

Zum Zeitpunkt t_M der Landung im Müllcontainer ist $h(t_M) = 0$.

Also ist:

$$-\frac{g}{2}{t_M}^2 + h_0 = 0$$

Das lässt sich nach t_M umstellen:

$$t_M = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Gesucht ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0.

Stellen Sie die Gleichung für x entsprechend um, und setzen Sie den gefundenen Ausdruck für den Zeitpunkt ein:

$$v_0 = x_0\sqrt{\frac{g}{2h_0}} = 5\text{m}\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2\cdot 10\text{ m}}} \approx 3{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die nötige Anfangsgeschwindigkeit ist also etwa 3,5 m/s – umgerechnet knapp 1 km/h.

Aufgabe 2

Wichtig ist bei dieser Aufgabe, dass die horizontale und die vertikale Bewegung von Fahrzeug und Gegenstand voneinander völlig unabhängig sind. Um herauszufinden, wann das Bügeleisen auf die Fahrbahn trifft, müssen Sie nur die Anfangshöhe und die Erdbeschleunigung berücksichtigen. Die Bewegungsgleichung für die Vertikale lautet daher:

$$y(t) = \frac{-g}{2}t^2 + 1\text{m}$$

Setzen Sie diese Gleichung gleich 0 (Höhe der Fahrbahn), können Sie sie leicht nach t umstellen und erhalten t = 0,45 Sekunden.

Jetzt benötigen Sie die horizontale Bewegungsgleichung des Autos aus Sicht des Bügeleisens (oder umgekehrt). Die beiden angegebenen Geschwindigkeiten für Auto und Bügeleisen gelten in entgegengesetzte Richtungen. Die Bewegungsgleichung lautet also:

$$x(t) = (90\text{km/h} - 0{,}5\text{m/s})t$$

Vergessen Sie nicht, die erste Einheit umzurechnen! Sie erhalten:

$$x(0{,}45\text{s}) = \left(90\,\frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} - 0{,}5\text{m/s}\right) \cdot 0{,}45\text{s} \approx 11\text{m}$$

Kapitel 20

Die Differentialgleichung erster Ordnung

Die Natur hält öfter mal Überraschungen bereit. Zum Beispiel Gleichungen, in denen sowohl eine Funktion als auch deren Ableitung vorkommen. Was tun? Regel Nummer eins: keine Panik. Regel Nummer zwei: dieses Kapitel lesen!

20.1 Wo Differentialgleichungen vorkommen

Manchmal suchen wir in der Mathematik Lösungen, die nicht einfach nur Zahlen sind, sondern zum Beispiel *Funktionen*. Nicht x ist die Unbekannte, sondern $f(x)$. Dementsprechend treten in den zugehörigen Gleichungen Funktionen an die Stelle von Variablen.

Differentialgleichungen – also Gleichungen, in denen Funktionen und ihre Ableitungen vorkommen – gibt es in vielen Fachgebieten. Sie haben die freie Auswahl!

Beginnen wir mit einem Beispiel aus der Elektrotechnik. Es ist nicht besonders kompliziert, kommt aber vielerorts zur Anwendung, auch in der Medizin. Also, frisch ans Werk und Strom an!

Strom, Spannung und Co.

Um die Differentialgleichung zu verstehen, die ich Ihnen gleich auftischen werde, müssen Sie einige Grundbegriffe aus der Elektrizitätslehre kennen. Für ein Studium der Elektrotechnik oder Physik ist das natürlich Pflichtprogramm.

Das Experiment, das wir uns ansehen, besteht aus einem *Kondensator*, der über einen Widerstand und einen Schalter an eine Spannungsquelle (z. B. eine handelsübliche 1,5-Volt-Batterie) angeschlossen ist (Abbildung 20.1).

Sobald Sie den Schalter schließen, wird ein Strom fließen und den Kondensator nach und nach aufladen, bis er voll ist. Wir interessieren uns für den zeitlichen Verlauf dieses Vorgangs – also für eine Funktion.

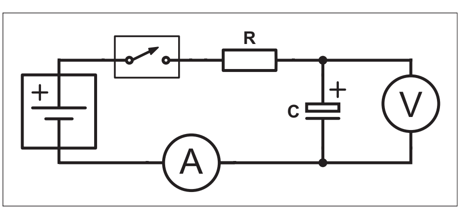

Abbildung 20.1 Das Schaltbild zeigt einen Kondensator C, der über einen Widerstand R aufgeladen werden kann. Mit eingezeichnet sind das Voltmeter für die Spannung am Kondensator (V) und das Amperemeter für die Strommessung (A).

Um das elektrische Geschehen zu verstehen, müssen Sie Folgendes wissen:

1. Die Spannung des Kondensators, die das Voltmeter misst, ist

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

Dabei ist Q die Ladung des Kondensators und C seine Kapazität. Die ist konstant, d. h., wenn Sie die Schaltung auf einer Steckplatine aufbauen würden, würden Sie beispielsweise einen Kondensator mit einer Kapazität von 1 000 µF (Mikrofarad) verwenden. Je größer die Kapazität, umso mehr Ladung (und Energie) kann ein Kondensator speichern. Zu Anfang ist die Ladung 0 (der Kondensator ist »leer«). Die Ladung wird durch die in den Kondensator fließenden Ladungsträger steigen und damit auch die Spannung an den Polen des Bauteils.

2. Der Widerstand R begrenzt den Stromfluss. Die an ihm abfallende Spannung ist laut dem *ohmschen Gesetz*:

   $$U_R = I \cdot R$$

   Je größer der Widerstandswert, umso kleiner wird der fließende Strom sein, und umso länger wird es dauern, den Kondensator aufzuladen. Im Experiment verwenden wir einen Wert von 1 MΩ (1 Megaohm).

3. In einer Reihenschaltung wie dieser muss die Summe der Spannungen an den in Reihe geschalteten Bauteilen gleich der Versorgungsspannung U_0 sein.

   Die beiden Messgeräte für Strom (Amperemeter) und Spannung U_C (Voltmeter) ändern daran nichts.

4. Strom ist die zeitliche Änderung der Ladung, d. h. die Ableitung der Ladung nach der Zeit:

   $$I = \dot{Q}$$

   Sobald Sie den Stromkreis mit dem Schalter schließen, gilt also für die Spannung im Stromkreis:

   $$U_0 = U_R + U_C$$

   Setzen Sie die obigen beiden Formeln ein. Sie erhalten:

   $$U_0 = I \cdot R + \frac{Q}{C}$$

   Jetzt verwenden Sie noch den Zusammenhang zwischen Ladungsänderung und Strom, um die Variable I loszuwerden:

   $$U_0 = R \cdot \dot{Q} + \frac{Q}{C}$$

   Da haben Sie sie, die versprochene *Differentialgleichung*. Sie heißt so, weil eine Größe (Q) und mindestens eine ihrer Ableitungen ($\dot{Q}$) vorkommen. Solche Gleichungen kommen in Naturwissenschaft und Technik häufig vor. Die komplizierteren Exemplare lassen sich nur sehr schwer lösen, dieses hier gehört zum Glück nicht dazu. Die vorliegende Gleichung heißt *inhomogen*, weil auf der linken Seite keine 0 steht, und *linear*, weil keine

Potenzen vorkommen. Sie ist *1. Ordnung*, weil maximal eine erste Ableitung vorkommt.

Wir werden sie in Kürze lösen, aber zunächst möchte ich Ihnen zeigen, wo solche Differentialgleichungen noch vorkommen.

Auf die Bremse treten

Wussten Sie, dass Reibungskraft proportional von der Geschwindigkeit abhängt? Zumindest näherungsweise stimmt das ziemlich genau.

Diese *Gleitreibung* verursacht eine Kraft auf den gebremsten Gegenstand, die seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzt und proportional zu seiner Geschwindigkeit ist. Also:

$$F_R = -\beta v$$

Die Konstante β ist der Reibungskoeffizient und hängt von Beschaffenheit und Bauweise der Bremse ab. Die Bremsbeläge Ihres Autos haben ein großes β und ein Eishockey-Puck ein verdammt kleines.

Sicher erinnern Sie sich an die Grundgleichung der Mechanik aus dem letzten Kapitel. Sie lautet:

$$F = m \cdot a$$

Wenn keine Kräfte außer der Reibung wirken, bekommt diese Gleichung folgendes Gesicht:

$$F_R = -\beta v = m \cdot a$$

Ferner wissen Sie, dass die Beschleunigung nichts anderes ist als die erste zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit. Und da steht sie schon, die Differentialgleichung:

$$-\beta v = m\dot{v}$$

Wenn Sie die Geschwindigkeit und ihre Ableitung auf eine Seite bringen, steht auf der anderen eine Null. Daher handelt es sich hier im Gegensatz zum vorangegangenen Beispiel um eine lineare *homogene* Differentialgleichung 1. Ordnung.

$$m\dot{v} + \beta v = 0$$

Diese Gleichung lässt sich auf ähnliche Weise lösen wie die erste. Wir kommen in Kürze dazu, aber zunächst möchte ich Ihnen ein drittes Beispiel zeigen, diesmal aus der Biologie.

Tierpopulationen

In der Biologie kann man die zeitliche Änderung einer Population von Lebewesen modellieren, indem man Geburten- und Sterberate berücksichtigt. Das Beispiel in diesem Abschnitt ist natürlich bewusst einfach gehalten, es berücksichtigt weder die Vogelfütterung im Frühling noch Spatzen fangende Hauskatzen (wussten Sie, dass die ca. 8 Millionen in Deutschland lebenden Katzen Schätzungen zufolge weit mehr Vögel töten als etwa der Straßenverkehr, von Windrädern ganz zu schweigen?).

Die Anzahl der Individuen ist N. Dann ist die Anzahl von Nachkommen proportional zu dieser Anzahl, also $g \cdot N$. Auch die absolute Anzahl der sterbenden Tiere ist (vereinfacht betrachtet) proportional zu deren Zahl. Sie geht negativ in die Bilanz ein, also $-s \cdot N$.

Neu geborene und sterbende Individuen ändern deren Gesamtzahl, entsprechen also $\dot{N}$. Damit haben wir folgende Gleichung:

$$\dot{N} = (g - s) \cdot N$$

Auch das ist eine lineare, homogene Differentialgleichung erster Ordnung.

Sie sehen: Solche Gleichungen sind alles andere als Exoten.

Umso wichtiger ist es, dass wir uns jetzt endlich um eine Lösung bemühen.

20.2 Die Differentialgleichung erster Ordnung lösen

Unabhängig von den oben aufgeführten Beispielen zeige ich Ihnen jetzt die Lösung (oder auch: Integration) einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung. Diese Lösung wird sich dann auf die Beispiele anwenden lassen.

Allgemein formuliert lautet das Problem also:

$$y'(x) - k \cdot y(x) = 0$$

Wie lässt sich diese Gleichung auflösen?

Allgemeine Lösung

Zunächst müssen wir sicherstellen, dass $y(x) \neq 0$ ist. Dann können wir schreiben:

$$k = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

Diese Gleichung integrieren wir auf beiden Seiten von 0 (dem Anfangswert) bis zu einem Wert b:

$$\int_0^b k \, \mathrm{d}x = \int_0^b \frac{y'(x)}{y(x)} \, \mathrm{d}x$$

Links erhalten Sie:

$$= k \cdot b$$

Lassen Sie uns im rechten Integral die *Substitutionsregel* anwenden mit:

$$s = y(x)$$

Dann ist $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = y'$, und das Integral sieht viel einfacher aus:

$$= \int\limits_{y(0)}^{y(b)} \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

Achten Sie darauf, dass die Grenzen umzurechnen sind. Da der Anfangswert (z. B. Anfangszeitpunkt) 0 ist, können wir auch $y(0)$ als Konstante y_0 betrachten.

Eine Stammfunktion für »eins durch« kennen Sie schon, es ist der natürliche Logarithmus. Also können Sie das Integral ausrechnen:

$$= \ln y(b) - \ln y_0$$

Eine Logarithmusregel später bleibt übrig:

$$k \cdot b = \ln \frac{y(b)}{y_0}$$

Stellen Sie diese Gleichung nach $y(b)$ um, indem Sie beidseitig die Exponentialfunktion anwenden und mit y_0 multiplizieren:

$$y(b) = y_0 e^{kb}$$

Damit haben wir eine Lösung. Sie enthält zwei Konstanten, die sich durch Anfangs- und Randbedingungen der konkreten Aufgabe ergeben.

Kennt man diese Lösung einmal (und das ist bei Ihnen jetzt ja der Fall), entfällt die ganze Herleitung künftig. Sie können einfach die Exponentialfunktion mit den entsprechenden Parametern als Lösungsansatz für jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung verwenden.

Anfangsbedingungen und Randwerte

Mit Blick auf die Differentialgleichung zur Tierpopulation (Abschnitt 20.1 unten) bietet es sich jetzt an, die gefundene allgemeine Lösung in eine reale Gleichung einzusetzen. Diese lautete ja:

$$\dot{N} = (g - s) \cdot N$$

Der Lösungsansatz ist jetzt also:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

Sie sehen sofort, dass N_0 nichts anderes ist als die Anzahl der Individuen zum Zeitpunkt $t = 0$, denn in dem Fall nimmt die Exponentialfunktion den Wert 1 an, es bleibt also:

$$N(0) = N_0$$

Um die Lösungsfunktion in die Differentialgleichung einsetzen zu können, benötigen Sie neben der Funktion selbst auch deren erste Ableitung. Die lautet:

$$\dot{N}(t) = N_0 k e^{kt}$$

Dabei verschafft uns die Kettenregel den zusätzlichen Faktor k – ansonsten ist die Ableitung identisch mit der Funktion selbst. Es gilt also:

$$\dot{N}(t) = k \cdot N(t)$$

Vergleichen Sie diese Gleichung mit der ursprünglichen Differentialgleichung, sehen Sie sofort, dass:

$$k = g - s$$

Damit ist die Konstante bestimmt, und Sie können die komplette Lösung hinschreiben:

$$N(t) = N_0 e^{(g-s)t}$$

Beispiel: Das Aussterben der Dodos

Der Dodo war ein Laufvogel, der nur auf der Insel Mauritius vorkam. Er wurde im 17. Jahrhundert zum letzten Mal lebend gesehen.

Angenommen, es gab im Jahr 1600 genau 10 000 Dodos. Unterstellen wir eine Geburtenrate von 1,5 (also im Schnitt 3 Eiern pro Jahr und Brutpaar) und eine jährliche Sterberate von 1,8. Wie lange dauerte es dann bis zum Aussterben, d. h., wann sank die Anzahl der Individuen unter 2?

Setzen Sie die Zahlenwerte in unsere Lösung ein:

$$N(t) = 10\,000 \cdot e^{(1{,}5-1{,}8)t}$$

Gefragt ist nach dem Zeitpunkt, an dem $N(t) = 2$ ist, denn für größere t wäre die Mindestanzahl der Individuen unterschritten. Die resultierende Gleichung müssen Sie jetzt nach t umstellen:

$$2 = 10000 \cdot e^{-0{,}3t}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{2}{10000}\right)}{-0{,}3} \approx 28{,}4$$

Der Übersicht halber habe ich die Einheiten weggelassen. Geburten- und Sterberate haben die Einheit »pro Jahr« (also a^{-1}), das Resultat hat dementsprechend die Einheit Jahre. Den Verlauf der Population zeigt Abbildung 20.2.

Blöd für den Dodo: Sobald die Sterberate größer ist als die Geburtenrate, ist der Exponent der Exponentialkurve negativ, und das Ende ist unausweichlich.

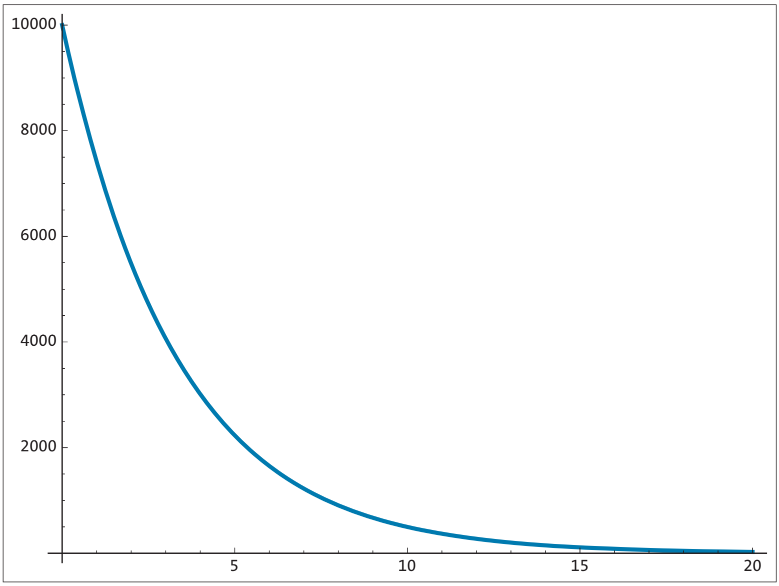

Abbildung 20.2 Das Ende des Dodos in Form einer Exponentialkurve

Inhomogene Differentialgleichung lösen

Kehren wir zurück zum Kondensator-Experiment aus Abschnitt 20.1 oben, »Strom, Spannung und Co.«.

Die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$U_0 = R \cdot \dot{Q} + \frac{Q}{C}$$

Im Unterschied zur Dodo-Gleichung ist diese hier *inhomogen*, es steht keine Null auf der linken Seite.

Lassen Sie uns auch diesen Fall allgemein lösen. Dann sieht die Gleichung wie folgt aus:

$$y'(x) - k \cdot y(x) = a(x)$$

Rechts steht also leider keine Null mehr, sondern eine Funktion $a(x)$. Dies kann eine Konstante sein (wie im Fall der Kondensator-Gleichung), muss es aber nicht.

Der Lösungsansatz für den homogenen Fall war ja:

$$y(x) = y_0 e^{kx}$$

Wir wenden jetzt einen Trick an, der auf den Namen *Variation der Konstanten* hört. Gemeint ist damit die Konstante y_0, die wir jetzt als Variable betrachten, die von x abhängt:

$$y(x) = c(x)e^{kx}$$

Leiten Sie diese Funktion mal nach der Produktregel ab. Sie erhalten:

$$y'(x) = c'(x)e^{kx} + c(x)ke^{kx}$$

Der rechte Summand ist dabei nichts anderes als $k \cdot y(x)$. Subtrahieren Sie den auf beiden Seiten, erhalten Sie ziemlich genau die inhomogene Differentialgleichung:

$$y'(x) - k \cdot y(x) = c'(x)e^{kx}$$

Das lässt sich nicht so einfach lösen, wir müssen in die Trickkiste greifen und suchen zunächst nach $c(x)$.

Rechts stand ja ursprünglich *a(x)*. Das ist also:

$$a(x) = c'(x)e^{kx}$$

Teilen Sie durch den Exponentialterm, erhalten Sie:

$$c'(x) = a(x)e^{-kx}$$

Das kann man integrieren, um $c(x)$ zu erhalten:

$$c(x) = \int a(x)e^{-kx}\,\mathrm{d}x$$

Im Beispiel mit dem Kondensator ist die Funktion $a(x)$ eine Konstante, die wir zunächst a nennen. In dem Fall ist das Integral leicht lösbar.

$$c(x) = q - \frac{a}{k}\,e^{-kx}$$

Die Konstante q ist dabei die obligatorische Integrationskonstante. Deren physikalische Bedeutung sehen wir später.

Setzen Sie das gefundene $c(x)$ in den Lösungsansatz ein, und Sie erhalten das eigentlich gesuchte $y(x)$:

$$y(x) = c(x)e^{kx} = \left(q - \frac{a}{k}\,e^{-kx}\right)e^{kx} = qe^{kx} - \frac{a}{k}$$

Die Ableitung ist:

$$y'(x) = qke^{kx}$$

Was sagt das jetzt über unseren Kondensator aus?

Vergleichen Sie mal die Parameter, wenn Sie die Gleichung für die Spannung durch R dividieren (damit $\dot{Q}$ allein steht, genau wie $y'(x)$ in der allgemeinen Gleichung):

$$\dot{Q} + \frac{1}{RC} Q = \frac{U_0}{R}$$

$$y'(x) - k \cdot y(x) = a$$

Offenbar entspricht $\frac{U_0}{R}$ dem a. Und $-k$ muss $\frac{1}{RC}$ sein.
Damit ist die Lösungsfunktion für $Q(t)$ gefunden. Aus

$$y(x) = qe^{kx} - \frac{a}{k}$$

wird (da $\frac{a}{k} = -\frac{U_0}{R} RC = -U_0 C$):

$$Q(t) = qe^{-\frac{t}{RC}} + U_0 C$$

Beispiel: Den Kondensator laden und entladen

Jetzt schauen wir uns den Anschaltvorgang an. In diesem Fall ist die Versorgungsspannung U_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ ein positiver Wert. Die Ladung des Kondensators ist zu diesem Zeitpunkt noch 0, also:

$$0 = Q(0) = q + U_0 C$$

Aus dieser Anfangsbedingung folgt für die noch unbestimmte Integrationskonstante q:

$$q = -U_0 C$$

Der Verlauf der Ladung ist also die Lösungsfunktion mit so festgelegtem q:

$$Q(t) = -U_0 C\, e^{-\frac{t}{RC}} + U_0 C$$

$$= U_0 C (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Das können wir uns einmal konkret für die gegebenen Werte ansehen:

$$U_0 = 1{,}5 \text{ V}$$

$$C = 1000 \text{ µF} = 10^{-3} \text{ F}$$

$$R = 1 \text{ MΩ} = 10^6 \text{ Ω}$$

$$Q(t) = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\left(1 - e^{-\frac{t}{10^3\,\mathrm{s}}}\right)\mathrm{As}$$

Achten Sie auf die Einheiten: Farad mal Ohm ergibt Sekunden, und die Standardeinheit der Ladung ist Amperesekunden (As). Wenn Sie immer nur SI-Einheiten verwenden, kann dabei nichts schiefgehen.

Wie der Ladevorgang genau aussieht, können Sie am Funktionsgraphen ablesen (Abbildung 20.3).

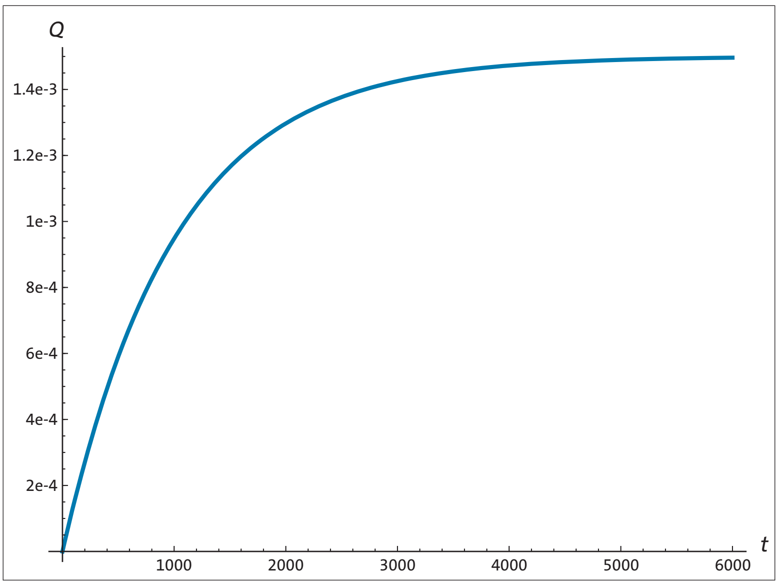

Abbildung 20.3 Die Ladefunktion des Kondensators ist eine Sättigungskurve.

Die Ladung des Kondensators steigt also zunächst schnell, aber je »voller« das Gerät ist, umso langsamer wird der Vorgang.

Beim Entladen sieht die Sache ein wenig anders aus. Die Versorgungsspannung U_0 ist schlagartig ab dem Zeitpunkt $t = 0$ null, die Integrationskonstante q wird zur Anfangsladung Q_0, also:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Die Entladekurve sieht aus, wie eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten nun einmal so ausschaut (Abbildung 20.4).

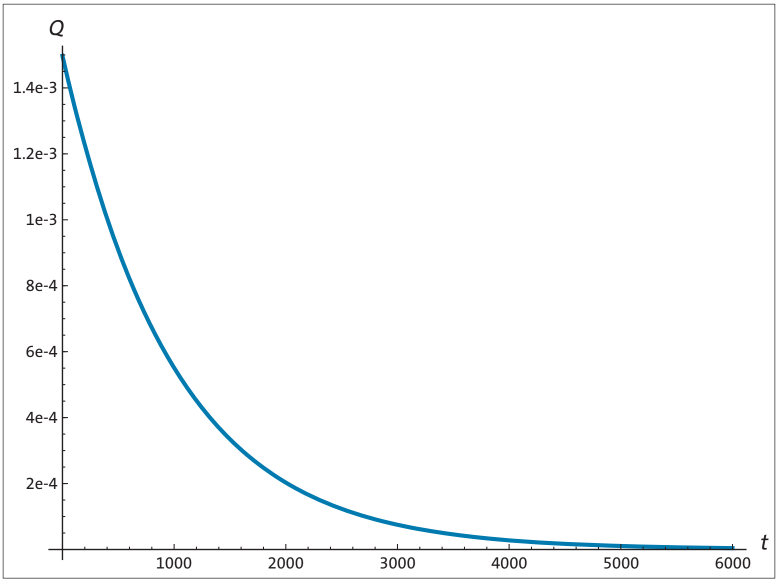

Abbildung 20.4 Die Ladung fällt beim Abschalten der Ladung wie die Population der aussterbenden Dodos – exponentiell.

Damit kennen Sie sowohl die allgemeine Methode, um lineare Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen, als auch typische Anwendungsfälle.