

Fit fürs Studium - Mathematik

Für alle MINT-Fächer

DAS INHALTS- VERZEICHNIS

» Hier geht's
direkt
zum Buch

Auf einen Blick

TEIL I Grundlagen

1	Mengenweise Mengen	24
2	Gesetze der Algebra	32
3	(Un-)gleichungen	56
4	Funktionen im kartesischen Koordinatensystem	86
5	e und log	110
6	Sinus und Cosinus	128
7	Wo ist meine Einheit?	148
8	Flächen und Räume	164
9	Vielleicht sechs Richtige	178
10	Herrn Booles Algebra	198
11	Was zu beweisen ist	208

TEIL II Analysis

12	Folgen und Grenzwerte	220
13	Reihen	230
14	Stetigkeit und Monotonie	238
15	Funktionen ableiten	254
16	Noch mehr Funktionen ableiten	274
17	Eigenschaften von Funktionen	286
18	Integralrechnung	316
19	Die Bewegungsgleichung	344
20	Die Differentialgleichung erster Ordnung	358
21	Das Pünktchen auf dem i	372
22	Hin und wieder zurück	388
23	Mantelflächen und Kurvenlängen integrieren	404
24	Nicht-kartesische Koordinatensysteme	414

TEIL III Lineare Algebra

25	Vektorrechnung	428
26	Lineare Gleichungssysteme	444
27	Willkommen in der Matrix	458
28	Eigenwerte, Determinanten und Co.	472
29	Besondere Matrizen anwenden	492
30	Mehrdimensionale Analysis	504
31	Numerische Verfahren	518
32	Analytische Geometrie	536

Inhalt

Einleitung	21
------------------	----

TEIL I Grundlagen

1 Mengenweise Mengen 24

1.1 Testen Sie sich selbst	25
1.2 Mengen und Elemente	25
Vereinigungs- und Schnittmengen	27
Unter- und Obermengen	27
Vordefinierte Mengen	28
1.3 Entspannungsübungen	30
1.4 Lösungen	30

2 Gesetze der Algebra 32

2.1 Testen Sie sich selbst	33
2.2 Gesetze, die jeder kennt	34
Vertauschen (fast) nach Belieben	34
Das Verteilungsgesetz	35
Zig Prozent auf alles!	37
Zinsen, bitte	37
Die Minusklammer	38
Binomische Formeln	39
2.3 Brüche, gemischt und dezimal	40
Gemeine Brüche	40
Kürzen und erweitern	40
Rechnen mit Brüchen	42
Gemischte Brüche	44
Dezimalkommazahlen	44
2.4 Potenzen und Wurzeln	47
Die Potenzgesetze	47

	Umkehren von Potenzen	49
	Wurzeln und gebrochene Exponenten	49
2.5	Entspannungsübungen	51
2.6	Lösungen	52

3 (Un-)gleichungen 56

3.1	Testen Sie sich selbst	57
3.2	Einfache Gleichungen und Ungleichungen	58
	Gleichungen umformen	58
	Ungleichungen lösen	60
3.3	Quadratische Gleichungen und Bruchgleichungen	61
	Die Wurzel ziehen	62
	Quadratische Ergänzung	62
	Bruchgleichungen	64
3.4	Gleichungssysteme	65
	Lineare Gleichungssysteme	65
	Das Gleichsetzungsverfahren	65
	Das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren	67
	Das Einsetzungsverfahren	67
3.5	Sachaufgaben	68
	Lösung mit System	69
3.6	Gleichungen lösen mit dem PC	71
	Bühne frei für Sage	71
	Gleichungen lösen mit Sage	72
	Gleichungen und mehr mit GeoGebra	74
3.7	Entspannungsübungen	76
3.8	Lösungen	77

4 Funktionen im kartesischen Koordinatensystem 86

4.1	Testen Sie sich selbst	87
4.2	Das Achsenkreuz	87

4.3	Lineare Funktionen	89
	Graphen zeichnen	89
	Plotten mit Sage	90
	Funktionen plotten mit GeoGebra	91
4.4	Parabeln	92
	Die Normalparabel	92
	Noch mehr Parabeln	94
	Rechenspiele mit Parabeln	95
4.5	Wurzel- und andere Funktionen	98
	Halbe Exponenten	98
	Die (Halb-)Kreisfunktion	99
4.6	Entspannungsübungen	101
4.7	Lösungen	102

5 **e und $\log$** 110

5.1	Testen Sie sich selbst!	111
5.2	Mehr, mehr, mehr!	111
	Eulers Zahl	112
	Weniger, aber niemals nichts	116
5.3	Logarithmen und ihre Regeln	117
	Logarithmen zu verschiedenen Basen	117
5.4	Entspannungsübungen	121
5.5	Lösungen	122

6 **Sinus und Cosinus** 128

6.1	Testen Sie sich selbst	129
6.2	Rechtwinklige Dreiecke	130
	Die drei Seiten	130
	Pythagoreische Tripel	132
	Dreiecke in GeoGebra	132
6.3	Der Einheitskreis	134
	Das Eckige muss in das Runde	134
	Unterwegs im Einheitskreis	135

	Periodizität	139
	Der Tangens	140
	Formeln mit Sinus und Cosinus	141
6.4	Entspannungsübungen	143
6.5	Lösungen	144

7 Wo ist meine Einheit? 148

7.1	Testen Sie sich selbst	149
7.2	Hoch, weit, schwer	149
	Ur-Maße	149
	Maße und ihre Einheiten	151
7.3	Von piko bis Tera	153
	Das geht doch genauer	153
	Das geht doch genauer ... (Version für Computer, Roboter & Co.)	155
7.4	Wahnsinnig große (und kleine) Zahlen	155
	Exponentialdarstellung mit Zehnerpotenzen	155
7.5	Runden, aber sinnvoll	156
	Runden oder nicht runden, das ist hier die Frage	157
	Symmetrisch runden	157
7.6	Entspannungsübungen	159
7.7	Lösungen	160

8 Flächen und Räume 164

8.1	Testen Sie sich selbst	165
8.2	Flächeninhalt und Umfang	165
	Flächeninhalte berechnen	165
	Flächenformeln zusammengefasst	166
	Umfang berechnen	168
8.3	Volumen und Oberfläche	169
	Volumeneinheiten	169
	Volumina von Körpern	170
	Oberflächen von Körpern	171

8.4	Entspannungsübungen	173
8.5	Lösungen	174

9	Vielleicht sechs Richtige	178
9.1	Testen Sie sich selbst	179
9.2	Statistik	179
	Arithmetisches Mittel	180
	Geometrisches Mittel	182
	Median	182
	Standardabweichung und Varianz	183
	Normalverteilung	186
9.3	Wahrscheinlichkeit	188
	Addition und Produkt	188
	Laplace-Experimente	189
	Würfel haben keine Erinnerung: Poisson-Verteilungen	190
	Permutationen	192
9.4	Entspannungsübungen	195
9.5	Lösungen	195

10	Herrn Booles Algebra	198
10.1	Testen Sie sich selbst	199
10.2	Aussagenlogik	199
	Und und oder nicht	199
	Exklusives Oder	200
	Rechengesetze der booleschen Algebra	201
10.3	Wie Computer rechnen	202
	Digitale Zahlensysteme	203
10.4	Entspannungsübungen	206
10.5	Lösungen	206

11	Was zu beweisen ist	208
11.1	Mathematische Beweise	209
11.2	Vollständige Induktion	209
	Das Induktionsprinzip	209
11.3	Indirekter Beweis	211
	Beweis durch Widerspruch	212
11.4	Entspannungsübung	215
11.5	Lösungen	215

TEIL II Analysis

12	Folgen und Grenzwerte	220
12.1	Zahlenfolgen	221
	Zahlen, Zahlen und kein Ende	221
	Rekursive Folgen Definitionen	222
	Geometrische Folgen	223
12.2	Grenzwerte und Konvergenz	224
	Wohin laufen sie denn?	224
	Das Verhalten von Nullfolgen	225
	Konvergenz	226
12.3	Entspannungsübungen	227
12.4	Lösungen	227

13	Reihen	230
13.1	Unendliche Summen	231
	Partialsummen und Summenfolgen	231
	Konvergente Reihen	232
13.2	Besondere Reihen	233
	Die geometrische Reihe	233
	Die harmonische Reihe	235
	Noch mehr konvergente Reihen	236

13.3	Entspannungsübungen	237
13.4	Lösungen	237

14 Stetigkeit und Monotonie 238

14.1	Grenzwerte von Funktionen	239
	Lückenfüller	240
	Dreifolgensatz	242
	Von Epsilon und Delta	243
	Grenzwerte im Unendlichen	243
	Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen	245
14.2	Stetige Funktionen	246
	Definition der Stetigkeit	246
	Sätze über stetige Funktionen	247
	Monotonie	248
14.3	Entspannungsübungen	250
14.4	Lösungen	250

15 Funktionen ableiten 254

15.1	Umschalten auf wahnsinnige Geschwindigkeit!	255
	Ort, Zeit, Tempo	255
	Momentane Geschwindigkeit	257
15.2	Die Steigung der Tangenten	258
	Klitzekleine Steigungsdreiecke	258
	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	260
	Die erste Ableitung	260
15.3	Ableitungsregeln	262
	Summenregel	263
	Produktregel	263
	Ableitung der Hyperbelfunktion	264
	Kettenregel	265
	Quotientenregel	266
	Potenzregel und Polynome ableiten	267
15.4	Entspannungsübungen	269
15.5	Lösungen	270

16 Noch mehr Funktionen ableiten 274

16.1 Exponentialfunktion ableiten	275
Erste Ableitung von e^x	275
Ableitung der Umkehrfunktion	276
Ableiten des Logarithmus	277
Ableiten von Potenzen mit reellem Exponenten	278
16.2 Trigonometrische Funktionen	279
Sinus und Cosinus	279
Ableitung des Tangens	280
16.3 Entspannungsübungen	283
16.4 Lösungen	283

17 Eigenschaften von Funktionen 286

17.1 Funktionengeometrie	287
Spiegelsymmetrie	287
Punktsymmetrie	288
Asymptotisches Verhalten	289
Faustregeln für gebrochen rationale Funktionen	292
Extremstellen	293
Extremwertaufgaben	294
Sattel- und Wendepunkte	296
17.2 Königsdisziplin Kurvendiskussion	298
17.3 Funktionen à la carte	302
Selbstgestrickt	302
Zufall, selfmade	306
17.4 Entspannungsübungen	309
17.5 Lösungen	309

18 Integralrechnung 316

18.1 Das riemannsche Integral	317
Eine Frage der Fläche	317
Ober- und Untersummen	319

18.2	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	320
	Das unbestimmte Integral	320
	Stammfunktionen	321
	Der Fundamentalsatz der Analysis	322
	Potenzen und Polynome integrieren	324
	Beispiel: Integration einer Fläche mit GeoGebra	325
	Partielle Integration	326
	Substitutionsregel	327
	Uneigentliche Integrale	331
	Integralkriterium	333
18.3	Anwendungen der Integration	334
	Integrale in der Physik	334
	Extremwertaufgaben mit Flächen	335
	Integrieren mit Sage	337
18.4	Entspannungsübungen	339
18.5	Lösungen	340

19 Die Bewegungsgleichung 344

19.1	Kraft und Beschleunigung	345
	Kraftlos	345
	Konstante Kraft	346
	Der Fall des Apfels	347
19.2	Die zweite Dimension	349
	Nur einen Steinwurf entfernt	349
	Die Wurfparabel	350
	Der optimale Wurfwinkel	351
19.3	Entspannungsübungen	355
19.4	Lösungen	355

20 Die Differentialgleichung erster Ordnung 358

20.1	Wo Differentialgleichungen vorkommen	359
	Strom, Spannung und Co.	359
	Auf die Bremse treten	361
	Tierpopulationen	361

20.2	Die Differentialgleichung erster Ordnung lösen	362
	Allgemeine Lösung	362
	Anfangsbedingungen und Randwerte	363
	Inhomogene Differentialgleichung lösen	365
20.3	Entspannungsübungen	370
20.4	Lösungen	370

21 Das Pünktchen auf dem i 372

21.1	Die komplexen Zahlen	373
	Schreibweisen	373
	Rechenregeln	374
	Der Fundamentalsatz der Algebra	375
	Multiplikation komplexer Zahlen	375
	Division komplexer Zahlen	376
21.2	Die komplexe Zahlenebene	377
	Komplexe Zahlen in der gaußschen Ebene	377
	Polarform	378
	Multiplikation in Polarform	380
21.3	Die eulersche Formel	382
	Immer im Kreis herum	382
	Die eulersche Identität	383
21.4	Funktionen und Folgen mit komplexen Zahlen	384
	Komplexe Funktionen ableiten	384
	Die Mandelbrotmenge	384
21.5	Entspannungsübungen	386
21.6	Lösungen	387

22 Hin und wieder zurück 388

22.1	Der harmonische Oszillator	389
	Nicht nur für Pendler	389
	Der Schwingkreis	391
22.2	Differentialgleichung zweiter Ordnung	392
	Lösung mit Eulers Formel	393

Lösung mit Sinus-Cosinus-Ansatz	395
Anfangs- und Randbedingungen	395
Differentialgleichung mit Dämpfung	396
22.3 Entspannungsübungen	400
22.4 Lösungen	400

23 Mantelflächen und Kurvenlängen integrieren 404

23.1 Kurvenlängen integrieren	405
Sehr kleine Hypotenusen	405
23.2 Mantelflächenintegrale	408
Rotationskörper	408
23.3 Entspannungsübungen	411
23.4 Lösungen	411

24 Nicht-kartesische Koordinatensysteme 414

24.1 Polarkoordinaten	415
Zweidimensionale Kreiskoordinaten	415
Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten	416
Polarkoordinaten mit GeoGebra	417
Infinitesimalrechnung in Polarkoordinaten	418
24.2 Dreidimensionale Koordinatensysteme	420
Zylinderkoordinaten	420
Kugelkoordinaten	421
24.3 Entspannungsübungen	424
24.4 Lösungen	424

TEIL III Lineare Algebra

25 Vektorrechnung 428

25.1 Vektoren in der euklidischen Ebene	429
Schreibweisen	429
Eigenschaften von Vektoren	430

Vektoren addieren	431
Skalarmultiplikation	432
Vektorrechnung mit GeoGebra	433
25.2 Die Basis	434
Lineare Unabhängigkeit	434
Einheitsvektoren und Basis	436
Vektorrechnung mit Sage	437
25.3 Entspannungsübungen	439
25.4 Lösungen	440

26 Lineare Gleichungssysteme 444

26.1 Das Gauß-Verfahren	445
Umformen gen Dreiecksform	445
Matrix-Schreibweise	447
Gleichungssysteme lösen mit Sage	447
26.2 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	448
Bedingungen für Lösbarkeit	448
Lösbarkeit homogener Gleichungssysteme	449
Die Determinante	449
Gleichungssysteme lösen mit GeoGebra	451
Die Regel von Sarrus	452
Cramersche Regel	453
26.3 Entspannungsübungen	455
26.4 Lösungen	455

27 Willkommen in der Matrix 458

27.1 Lineare Abbildungen	459
Definition linearer Abbildungen	459
Eigenschaften linearer Abbildungen	460
Kern, Bild und Dimensionsformel	461
Praktische Anwendungen	462
27.2 Verknüpfung linearer Abbildungen	462
Summen von Matrizen	463
Vielfache von Matrizen	463

Matrizenmultiplikation	463
Die inverse Abbildung	465
Matrizenrechnung mit Sage	467
Matrixoperationen mit GeoGebra	468
27.3 Entspannungsübungen	470
27.4 Lösungen	470

28 Eigenwerte, Determinanten und Co. 472

28.1 Matrizen unter der Lupe	473
Determinante und Invertierbarkeit	473
Basiswechselmatrix	474
Basiswechsel mit GeoGebra	475
28.2 Eigenwerte	476
Das Eigenwertproblem	476
Berechnung von Eigenwerten	477
Eigenräume	479
Diagonalisieren	480
28.3 Produkte	482
Skalarprodukt	483
Kreuzprodukt	485
28.4 Entspannungsübungen	487
28.5 Lösungen	488

29 Besondere Matrizen anwenden 492

29.1 Geometrische Transformationen	493
Orthonormalsysteme	493
Isometrien	493
Spiegelmatrizen	494
Drehmatrizen	495
Drehmatrix mit GeoGebra	496
Koordinatentransformation	497
29.2 Bildbearbeitung	498
Faltungsmatrizen	499

29.3	Entspannungsübungen	501
29.4	Lösungen	501

30 Mehrdimensionale Analysis 504

30.1	Abbildungen in mehr als einer Dimension	505
	Vektoren und ihre Schreibweisen	505
	Mehrdimensionale Funktionen	506
	Mehrdimensionale Funktionen mit GeoGebra	507
30.2	Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$	508
	Partielle Ableitungen	509
	Der Gradient	510
	Die Jacobimatrix	511
	Jacobimatrix und Koordinatentransformation	513
30.3	Entspannungsübungen	515
30.4	Lösungen	515

31 Numerische Verfahren 518

31.1	Intervallschachtelung	519
	Fortgesetzte Bisektion	519
	Kontinuierlicher Fall	520
31.2	Interpolation	522
	Polynominterpolation	522
	Lagrangesche Interpolationsformel	524
31.3	Ausgleichsrechnung	526
	Methode der kleinsten Quadrate	526
	Beispiel: Erdbeschleunigung mit dem Handy messen	526
31.4	Numerische Integration	528
	Trapezregel	529
	Adaptive Integration mit Sage	530
31.5	Entspannungsübungen	532
31.6	Lösungen	533

32	Analytische Geometrie	536
32.1	Ein Universum voller Vektoren	537
	Eine Gerade	537
	Zwei Geraden	539
	Geraden analysieren mit GeoGebra	540
	Ebenen	543
	Normale	544
	Hessesche Normalenform	546
	Kugeln	548
32.2	Begegnungen im Nichts	550
	Gerade trifft Ebene	550
	Ebene trifft Ebene	553
	Projektion und Spiegel	554
	Der Kreis schließt sich	555
32.3	Entspannungsübungen	560
32.4	Lösungen	561
	Anhang	566
	Index	571