

Auf einen Blick

1	Einführung	15
2	Mathematische Notation	23

TEIL I Berechenbarkeit und formale Sprachen

3	Einführung in die Berechenbarkeitstheorie	67
4	Problemtypen	73
5	Einführung in formale Sprachen	85
6	Reguläre Sprachen	91
7	Kontextfreie Sprachen	161
8	Kontextsensitive Sprachen	193
9	Aufzählbare Sprachen	197
10	Nicht Berechenbares	241

TEIL II Algorithmik

11	Einführung in Algorithmik	261
12	Obere Schranken für Laufzeiten	263
13	Laufzeiten von Datenstrukturen	275
14	Brute-Force-Algorithmen	285
15	Greedy-Algorithmen	295
16	Divide and Conquer	313
17	Dynamische Programmierung	335
18	Amortisierte Analyse	351

TEIL III Komplexitätstheorie

19	Einführung in die Komplexitätstheorie	357
20	Beweistechniken für untere Schranken	361
21	P vs. NP: Bedingte untere Schranken	377
22	Ausblick: Parametrisierte Analyse	408

Inhalt

1	Einführung	15
1.1	Kompetenzen für die theoretische Arbeit	16
1.1.1	Abstraktionsvermögen	16
1.1.2	Präzises Arbeiten	16
1.1.3	Frustrationstoleranz und Kreativität	17
1.1.4	Kommunikationsfähigkeit	17
1.2	Themen der theoretischen Informatik	18
1.2.1	Berechenbarkeitstheorie	18
1.2.2	Algorithmik	19
1.2.3	Komplexitätstheorie	19
1.3	Anleitung fürs Buch	20
1.4	Danksagungen	21
2	Mathematische Notation	23
2.1	Logische Aussagen	24
2.1.1	Verknüpfung von logischen Aussagen	24
2.1.2	Vorrangregeln	25
2.1.3	Variablen	26
2.1.4	Umformungsregeln	26
2.2	Mengen	27
2.2.1	Mengenoperationen	28
2.2.2	Quantoren und Prädikate	29
2.2.3	Mengenbeziehungen	30
2.2.4	Tupel	31
2.3	Relationen und Funktionen	32
2.3.1	Binäre Relationen	32
2.3.2	Funktionen	33
2.3.3	Binäre Operationen über Mengen	36

2.4	Graphen	37
2.4.1	Grundbegriffe	37
2.4.2	Pfade, Kreise und Bäume	38
2.4.3	Teilgraphen und Spannbäume	39
2.4.4	Gerichtete Kanten	39
2.4.5	Gewichtete Graphen	39
2.5	Unendlichkeiten und Abzählbarkeit	40
2.5.1	Abzählbar unendliche Mengen	40
2.5.2	Überabzählbar unendliche Mengen	41
2.6	Beweistechniken	42
2.6.1	Grundprinzipien des Beweisens	42
2.6.2	Direkter Beweis	44
2.6.3	Fallunterscheidungen	46
2.6.4	Beweis per Kontraposition	48
2.6.5	Indirekter Beweis / Beweis per Widerspruch	49
2.6.6	Vollständige Induktion	50
2.6.7	Konstruktive und nichtkonstruktive Beweise	54
2.6.8	Typische Schwierigkeiten und Fehler beim Beweisen ...	54
2.7	Aufgaben	57
2.8	Lösungen	58

TEIL I Berechenbarkeit und formale Sprachen

3	Einführung in die Berechenbarkeitstheorie	67
3.1	Algorithmus	68
3.2	Zu viele Funktionen	69
3.3	Das Halteproblem	70
3.4	Kontrollfragen	72
3.5	Antworten	72

4	Problemtypen	73
4.1	Formalisierung von Problemen	73
4.2	Funktionen berechnen	75
4.3	Datencodierung	75
4.4	Sprachen entscheiden	78
4.5	Problemklassen der Berechenbarkeitstheorie	79
4.6	Aufgaben	82
4.7	Lösungen	83
5	Einführung in formale Sprachen	85
5.1	Definition	85
5.2	Die Chomsky-Hierarchie	88
5.3	Aufgaben	89
5.4	Lösungen	90
6	Reguläre Sprachen	91
6.1	Deterministische endliche Automaten	92
6.1.1	Formale Definition	93
6.1.2	Sprachbeweise	95
6.1.3	Simultane strukturelle Induktion	98
6.1.4	Automatenentwurf	100
6.2	Nichtdeterministische endliche Automaten	103
6.2.1	Formale Definition	105
6.2.2	Erweiterung: Epsilonübergänge	106
6.2.3	Äquivalenz zu deterministischen Automaten	108
6.3	Grammatiken	111
6.3.1	Formale Definition	113
6.3.2	Reguläre Grammatiken	114

6.3.3	Varianten regulärer Grammatiken	115
6.3.4	Äquivalenz zu endlichen Automaten	116
6.4	Reguläre Ausdrücke	120
6.4.1	Formale Definition	120
6.4.2	Äquivalenz zu endlichen Automaten	121
6.5	Abschlusseigenschaften	127
6.5.1	Abgeschlossenheit unter Vereinigung, Konkatenation und kleenescher Hülle	127
6.5.2	Abgeschlossenheit unter Schnitt und Differenz	128
6.5.3	Abgeschlossenheit unter Komplement	129
6.5.4	Abgeschlossenheit unter Spiegelung	130
6.5.5	Abgeschlossenheit unter Homomorphismen	130
6.5.6	Beweise mit Abschlusseigenschaften	131
6.6	Entscheidungsprobleme auf regulären Sprachen	132
6.7	Äquivalenzklassenzerlegung	134
6.7.1	Die Nerode-Relation	135
6.7.2	Minimale Automaten	136
6.7.3	Der Table-Filling-Algorithmus	137
6.8	Nichtreguläre Sprachen	139
6.8.1	Der Satz von Myhill-Nerode	139
6.8.2	Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen	140
6.8.3	Beweise mit Abschlusseigenschaften	143
6.9	Ausblick	144
6.10	Aufgaben	144
6.11	Lösungen	149
7	Kontextfreie Sprachen	161
7.1	Kontextfreie Grammatiken	162
7.2	Eindeutige Ableitungsbäume	164
7.3	Chomsky-Normalform	166
7.4	Exkurs: Kellerautomaten	170
7.4.1	Formale Definition	172
7.4.2	Varianten	174

7.5	Abschlusseigenschaften	175
7.6	Entscheidungsprobleme auf kontextfreien Sprachen	176
7.6.1	Wortproblem: Der Cocke-Younger-Kasami- Algorithmus (CYK)	176
7.6.2	Leerheitsproblem	180
7.7	Nicht-kontextfreie Sprachen	181
7.7.1	Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen	181
7.7.2	Beweise mit Abschlusseigenschaften	183
7.8	Ausblick	183
7.9	Aufgaben	184
7.10	Lösungen	186
8	Kontextsensitive Sprachen	193
8.1	Kontextsensitive und monotone Grammatiken	194
8.2	Das Wortproblem auf kontextsensitiven Sprachen	195
9	Aufzählbare Sprachen	197
9.1	Turingmaschinen	199
9.1.1	Berechnungen mit Turingmaschinen	200
9.1.2	Varianten und Ausblick	201
9.2	While-Programme	202
9.2.1	Syntax und Semantik	203
9.2.2	Identität und konstante Funktionen	205
9.2.3	Einfache Arithmetik: Addition	206
9.2.4	Aufrufen von Unterprogrammen	209
9.2.5	Fallunterscheidungen, Logik und Vergleiche	213
9.2.6	For-Schleifen	215
9.2.7	Cantorsche Paarungsfunktion	215
9.2.8	Datenstrukturen	217
9.3	Gödelnummern	218
9.4	Das universelle While-Programm	220

9.5	Das schrittbeschränkte universelle While-Programm	223
9.6	Diagonalisierung und min-Suche	224
9.7	Prädikate für semi-entscheidbare Sprachen	226
9.8	Semi-Entscheidbarkeit vs. Aufzählbarkeit	227
9.9	Das S-m-n-Theorem	228
9.10	Das kleenesche Rekursionstheorem	230
9.11	Weitere Modelle und Charakterisierungen	233
9.12	Aufgaben	233
9.13	Lösungen	235

10 Nicht Berechenbares 241

10.1	Beweise mit KRT	243
10.2	Der Satz von Rice	244
10.3	Reduktionen	246
10.4	RE-Vollständigkeit	250
10.5	Ausblick: Die arithmetische Hierarchie	251
10.6	Aufgaben	252
10.7	Lösungen	254

TEIL II Algorithmik

11 Einführung in Algorithmik 261

12 Obere Schranken für Laufzeiten 263

12.1	Das Maschinenmodell	264
12.2	Die Laufzeit eines Algorithmus	267

12.3	Die Größe einer Eingabe	268
12.4	Die Landau-Notation	268
12.5	Aufgaben	271
12.6	Lösungen	272

13 Laufzeiten von Datenstrukturen 275

13.1	Arrays	275
13.2	Listen	277
13.3	Verschachtelte Datenstrukturen und Graphen	279
13.4	Aufgaben	281
13.5	Lösungen	282

14 Brute-Force-Algorithmen 285

14.1	Lineare Suche	286
14.2	Backtracking/Tiefensuche	288
14.3	Aufgaben	292
14.4	Lösungen	293

15 Greedy-Algorithmen 295

15.1	Beweis mit Austauschargument	296
15.1.1	Farbeimer kaufen	296
15.1.2	Minimale Spannäume	299
15.2	Greedy stays ahead	302
15.3	Aufgaben	304
15.4	Lösungen	306

16	Divide and Conquer	313
16.1	Mergesort	314
16.1.1	Algorithmus	314
16.1.2	Korrektheit	316
16.1.3	Laufzeit	317
16.2	Binäre Suche	319
16.2.1	Algorithmus	320
16.2.2	Korrektheit	320
16.2.3	Laufzeit	321
16.3	Multiplikation großer Zahlen	321
16.3.1	Algorithmus	322
16.3.2	Laufzeitanalyse	323
16.3.3	Der Algorithmus von Karazuba	324
16.4	Das Mastertheorem	325
16.5	Ausblick	326
16.6	Aufgaben	327
16.7	Lösungen	329
17	Dynamische Programmierung	335
17.1	Fibonacci-Zahlen	336
17.2	Rückgeld geben	337
17.3	Der Algorithmus von Dijkstra	341
17.4	Aufgaben	344
17.5	Lösungen	346
18	Amortisierte Analyse	351
18.1	Dynamische Arrays	351
18.2	Guthabenmethode	353
18.3	Ausblick	353

TEIL III Komplexitätstheorie		
19	Einführung in die Komplexitätstheorie	357
19.1	Die Komplexität eines Problems	358
19.2	Bedingte Schranken	358
19.3	Auswege für schwierige Probleme	359
20	Beweistechniken für untere Schranken	361
20.1	Die Ausgabegröße	362
20.2	Das informationstheoretische Argument	363
20.2.1	Analyse der Ablaufpfade	364
20.2.2	Analyse des Informationsgewinns pro Anfrage	366
20.3	Das Adversary-Argument	367
20.4	Reduktionen	370
20.5	Aufgaben	372
20.6	Lösungen	374
21	P vs. NP: Bedingte untere Schranken	377
21.1	Die Komplexitätsklasse P	378
21.2	Die Komplexitätsklasse NP	380
21.2.1	Ein Praxisbeispiel: Independent Set	381
21.2.2	Die Definition von (Nicht-)Determinismus	383
21.2.3	Nichtdeterministisch berechnen und deterministisch verifizieren	386
21.3	Polynomialzeitreduktionen	388
21.3.1	Definition	389
21.3.2	Beispiel: Independent Set und Vertex Cover	390
21.4	NP-schwere und NP-vollständige Probleme	392
21.4.1	Der Satz von Cook	395

21.4.2	Von CNF-SAT zu 3-SAT	396
21.4.3	Von 3-SAT zu IS	398
21.4.4	Von 3-SAT zu Subset-Sum	401
21.5	Ausblick: Mehr NP-vollständige Probleme	404
21.6	Aufgaben	405
21.7	Lösungen	406
22	Ausblick: Parametrisierte Analyse	408
Index	410