# Mathematik nach Feierabend

## Verblüffendes praktisch erklärt

» Hier geht‘s direkt zum Buch

# DIE LESEPROBE

## Kapitel 7
# Mit Lotto gewinnen?

*Die Wahrscheinlichkeit für einen Lottogewinn ist bekannt. So klein diese Chance auch ist, die Menschen spielen trotzdem Lotto. Warum dem so ist und wie man sich die Gewinnchance veranschaulichen kann, wird hier besprochen.*

## 7.1 Wie kann man die Gewinnchance im Lotto veranschaulichen?

Lotto ist ein gesellschaftlich akzeptiertes Spiel. Niemand wird davon ausgeschlossen, da die Einsätze gering und die Spielregeln leicht zu verstehen sind. Viele Menschen spielen Lotto, obwohl die Gewinnchancen so gering sind. Offenbar weichen die subjektiv wahrgenommenen Gewinnchancen von den tatsächlichen stark ab. Im Folgenden wird versucht, ein Verständnis für die Größe der Gewinnchancen beim Lotto zu vermitteln.


**Abbildung 7.1** Gewinnchance im Lotto

Auf dem Schild, das vor einer Lottoannahmestelle steht, ist die Gewinnwahrscheinlichkeit 1:139838160 für 6 Richtige plus Superzahl angegeben. Es gibt viele Menschen, die »zahlenblind« sind und keine Vorstellung von sehr großen oder sehr kleinen Zahlen haben. Für solche Menschen stellt die Zahlenangabe auf dem Schild eher eine Werbung und einen Anreiz dar, eben doch Lotto zu spielen. Interessantes zum mathematischen Analphabetentum findet man in [PAU].

Rechnet man 1:139838160 in eine Prozentangabe um, dann erhält man etwa 0,0000007 % als Gewinnwahrscheinlichkeit. Zur Veranschaulichung dieser Gewinnchance betrachtet man eine Fahrt von Berlin-Charlottenburg nach Rennes in der Bretagne, deren Fahrzeit vom Routenplaner mit 13 h 23 min angegeben wird und die 1395 km, also ungefähr 139 000 000 cm, lang ist.


**Abbildung 7.2** Fahrt von Berlin in die Bretagne

Stellt man sich vor, dass *irgendwo* am Straßenrand ein Pfahl der Breite 1 cm aufgestellt wurde und dass man während der Fahrt *irgendwann* eine 1-Cent-Münze aus dem Seitenfenster des Autos wirft, dann ist die Chance, den Pfahl zu treffen, ebenso groß wie die zuvor angegebene Gewinnwahrscheinlichkeit.

Ist man nur an 6 Richtigen interessiert, das heißt ohne die Superzahl, dann ergibt sich für dieses Beispiel als Fahrtstrecke etwa 140 km. Das ist z. B. die Entfernung von Karlsruhe nach Frankfurt.

Nach diesen Vergleichen erscheint es rätselhaft, dass Millionen von erwachsenen Menschen Lotto spielen. Die Gewinnchancen werden von den Spielerinnen und Spielern offenbar gewaltig überschätzt. Forscht man nach den Gründen für diese falsche Einschätzung, muss man sich fragen, wo und wann dieses Verhalten den Menschen einen Vorteil geboten haben könnte. Denkt man an die Menschen der Frühzeit, die in kleinen Gruppen zusammenlebten und Kontakt mit ebenso kleinen Gruppen hatten, dann haben Nachrichten, z. B. über die Jagderfolge der einen Gruppe, die andere

Gruppe unmittelbar betroffen. Es war sinnvoll, in der Region das Jagdglück zu versuchen, in der auch die andere Gruppe erfolgreich war. Nachrichten, die heute von den Medien verbreitet werden, betreffen aber meist nicht den persönlichen Nahbereich. Die Meldung vom Gewinn des Jackpots garantiert nicht, dass man das nächste Mal selbst erfolgreich sein wird – trotzdem scheint das alte Verhaltensmuster weiter zu bestehen, und dieses suggeriert eine Gewinnchance, die gar nicht vorhanden ist.

Hinzu kommt, dass sich Spielende in der Zeit zwischen der Abgabe des Lottoscheins und der Ziehung in dem angenehmen Zustand der Hoffnung auf den Gewinn befinden, mit dem sie ja intuitiv rechnen. Dieses erlebte Glücksgefühl bestärkt sie, auch das nächste Mal wieder zu spielen.

Selbst Casanova ging Berichten zufolge auf seinen Reisen in den jeweiligen Städten zunächst immer erst »Lotto spielen«, und »dies war eigentlich seine ausgeprägtere Leidenschaft« [BÖH].

Begonnen hatte das Zahlenlotto 1643 in Genua und erlebte von da an eine wechselnde Erfolgsgeschichte. Im 19. Jahrhundert war das Lottospiel in den deutschen Territorialstaaten zum Teil verboten, um zu vermeiden, dass Spielende in der Hoffnung auf den großen Gewinn ihr gesamtes Vermögen verlieren. Das deutsche Zahlenlotto gibt es seit dem 9. Oktober 1955 wieder. Die Annahmestellen der Lottogesellschaften sichern Tausende von Arbeitsplätzen. Pro Jahr werden in Deutschland im Lottospiel etwa 6 Milliarden Euro umgesetzt. Von den Lottoeinnahmen geht nur die Hälfte als Gewinn an die Spielerinnen und Spieler, etwa 40 % fließen in die Landeskassen, der Rest geht an die Lottoannahmestellen.

## 7.2 Berechnung der Gewinnchance

Wie ergibt sich die *Gewinnchance* von 1:139838160 für 6 Richtige plus Superzahl?

Eine naheliegende erste Überlegung sieht wie folgt aus: In der Lottotrommel befinden sich 49 Kugeln. Für das Ziehen der 1. Kugel gibt es also 49 Möglichkeiten. Danach befinden sich 48 Kugeln in der Trommel. Für die zweite Kugel gibt es deshalb 48 Möglichkeiten usw. Die Produktregel liefert dann $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$ mögliche Ziehungen.

Diese Überlegung lässt aber eine entscheidende Tatsache außer Acht, die ich an einem Beispiel verdeutlichen möchte. Angenommen, eine Ziehung der Lottozahlen liefert der Reihe nach die Zahlen 16, 47, 48, 39, 43 und 5. Wie üblich wurden die Kugeln nach der Ziehung aufsteigend sortiert, so dass das Ergebnis für diesen Spieltag 5, 16, 39, 43, 47, 48 ist. Nun hätten die gezogenen Kugeln auch in der Reihenfolge 39, 47, 5, 16, 43 und 48 zu dem Ziehungsergebnis geführt. Genauer gesagt liefert jede Umordnung (Permutation) der Zahlen 5, 16, 39, 43, 47, 48 dasselbe Ziehungsergebnis.

Insgesamt gibt es $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ Permutationen, die alle zu demselben Ziehungsergebnis führen. Die Menge der zuvor berechneten 10 068 347 520 Ziehungen zerfällt damit in Teilmengen, die jeweils aus 720 Elementen bestehen.

Jede Teilmenge steht für ein Ziehungsergebnis beim Lotto. Insgesamt gibt es also 10 068 347 520 / 720 = 13983816 verschiedene Ziehungsergebnisse ohne die Superzahl.

Da es für die Superzahl 10 Möglichkeiten gibt, erhält man $13983816 \cdot 10 = 139838160$ mögliche Ziehungsergebnisse bei Berücksichtigung der Superzahl.

Für die eben durchgeführte Rechnung $\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ schreibt man als Abkürzung $\binom{49}{6}$ (lies: 49 über 6). Man nennt diesen Ausdruck einen *Binomialkoeffizienten*. Weiteres zu Binomialkoeffizienten finden Sie in Kapitel 25, »Erkenne dich selbst«.

## 7.3 Zur Simulation einer Lottoziehung

Ein Gefühl für die tatsächlichen Gewinnchancen beim Lotto kann man durch häufiges Spielen mit unmittelbarer Rückmeldung über die Anzahl der »Richtigen« erwerben. Das ist mit der Hilfe eines Computers leicht zu bewerkstelligen. Um eine Lottoziehung zu simulieren, genügt es aber nicht, wenn man 6 Zufallszahlen zwischen 1 und 49 erzeugt. Dabei treten nämlich überraschend oft doppelte oder mehrfache Zahlen auf, weil eine bereits gezogene Zahl nicht wie im realen Lotto aus der Lostrommel entfernt wird. Doppelt oder mehrfach auftretende Zahlen erscheinen mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 27 %. Das ist leicht nachvollziehbar, wenn Sie zuerst die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass alle 6 erzeugten Zufallszahlen voneinander verschieden sind:

Bei der ersten erzeugten Zufallszahl gibt es 49 verschiedene Möglichkeiten für ein Ergebnis. Da noch keine andere Zahl gezogen wurde, ist es sicher, dass keine Übereinstimmung vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist 1 bzw. $\frac{49}{49}$.

Die zweite gezogene Zahl ist mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{48}{49}$ von der ersten Zahl verschieden. Auf diese Weise ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle gezogenen Zahlen voneinander verschieden sind zu $\frac{49}{49} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{47}{49} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{49}$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Zahlen mehrfach auftreten, ist deshalb gleich $1 - \frac{49}{49} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{47}{49} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{49} \approx 27\%$.

Mit der Tabellenkalkulationsdatei, die zu diesem Kapitel gehört, können Sie diese Wahrscheinlichkeit experimentell erfahren, indem Sie so vorgehen, wie es in Abschnitt 7.4, »Zum Mitmachen: Lottoziehungen mit Tabellenkalkulation«, beschrieben wird.

Wie kann man dabei das Problem der mehrfach auftretenden Zahlen vermeiden? Auf die folgende Weise können Sie vorgehen:

**Erzeugung einer Lottoziehung**

1. Erzeugen Sie 49 Zufallszahlen aus dem Intervall [0;1], also im Zahlenbereich zwischen 0 und 1, zum Beispiel 0,124.
2. Stellen Sie von jeder dieser Zahlen fest, an welcher Stelle sie stehen würde, wenn die zuvor gezogenen Zufallszahlen aufsteigend sortiert würden. Damit ordnen Sie jeder der Zahlen eine *Rangzahl* zu.
3. Schreiben Sie diese Rangzahlen nebeneinander.
4. Die ersten 6 Rangzahlen sind die Lottozahlen.

Wenn Sie möchten, können Sie eine Lottoziehung mithilfe der Tabellenkalkulation durchführen. In Abschnitt 7.4 zum Mitmachen sehen Sie, wie dies bewerkstelligt wird.

## 7.4 Zum Mitmachen: Lottoziehungen mit Tabellenkalkulation

Die im vorigen Abschnitt erklärte Erzeugung von Lottozahlen können Sie hier durchführen.

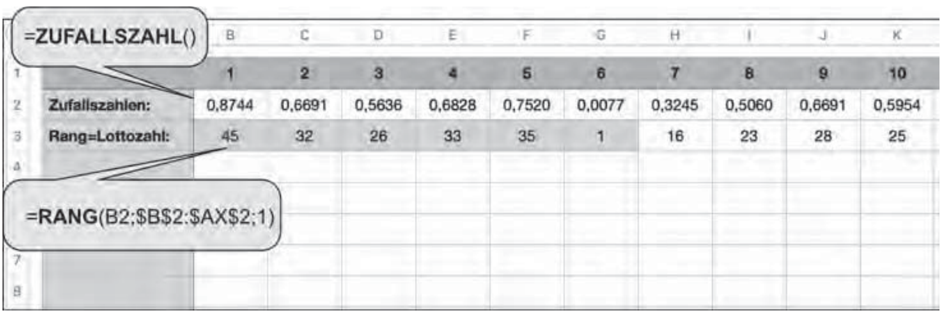



**Abbildung 7.3** Erzeugung von 6 Lottozahlen

In der 2. Zeile der Abbildung werden 49 Zufallszahlen zwischen 0 und 1 erzeugt. Das übernimmt die Funktion `ZUFALLSZAHL()`.

In der 3. Zeile werden die Ränge der Zahlen, die in Zeile 2 stehen, ermittelt. Dafür kann man die Funktion `RANG` benutzen. Die erste Eingabe für `RANG` ist die Zahl aus Zeile 2, deren Rang ermittelt werden soll. Danach folgt der Bereich, in dem alle Zahlen stehen, also in diesem Fall die Zeile 2 von B2 bis AX2. In der Zelle AX2 steht die 49. Zufallszahl. Die 3. Eingabe für die Funktion `RANG` ist 0 oder 1. Bei 0 erhält der größte Wert der Zahlen den Rang 1, bei 1 erhält der kleinste Wert der Zahlen den Rang 1. Auf diese Weise können Sie mit Ihrer Tabellenkalkulation Lottoziehungen simulieren und feststellen, ob Ihre Lieblingszahlen erschienen sind, d. h., ob Sie gewonnen hätten.

# Kapitel 10
# Die Überfahrt

*»Die Überfahrt« ist ein altes und bekanntes Rätsel, das selbst für Kinder kein Problem darstellt. Hier will ich Ihnen zeigen, dass das Rätsel mit Methoden des Zweiersystems und der Graphentheorie systematisch gelöst werden kann. Überraschenderweise zeigt sich dabei, dass das Rätsel mehr als eine Lösung besitzt.*

## 10.1 Das Problem der Überfahrt

Seit den Tagen des Mönchs Alkuin von York (735–804) erfreut sich das Rätsel von der Überfahrt von Mann, Wolf, Ziege und Kohlkopf großer Beliebtheit. Alkuin war Lateinlehrer und Schulleiter der Domschule von York und von 793 bis 796 Privatlehrer von Karl dem Großen. Aus der Zeit um 800 stammt ein vermutlich von Alkuin verfasstes Manuskript mit 56 mathematischen Aufgaben. Die 18. Aufgabe (PROPOSITIO DE LUPO ET CAPRA ET FASCICULO CAULI) ist das hier betrachtete Rätsel. Dem bzw. der Lateinkundigen wird aufgefallen sein, dass hier von einem Bündel Kohl (*fasciculo cauli*) und nicht von einem Kohlkopf gesprochen wird. Der Grund dafür ist einfach: Zur damaligen Zeit gab es in Europa noch keinen Kopfkohl, sondern nur Kraus- oder Grünkohl. In späteren Zeiten wurde aus dem Kohlbündel dann der Kohlkopf. In heutiger Zeit lautet das Rätsel folgendermaßen:

> *Es war einmal ein Mann, der musste einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf in seinem Kahn über den Fluss bringen. In dem Kahn konnte aber nur er und mit ihm entweder der Wolf, die Ziege oder der Kohlkopf untergebracht werden. Wenn man aber den Wolf mit der Ziege ohne Aufsicht zurücklässt, frisst der Wolf die Ziege, und wenn die Ziege mit dem Kohlkopf alleine gelassen wird, dann frisst sie diesen. Der Mann schaffte es dennoch, sowohl die Tiere als auch den Kohlkopf unversehrt ans andere Ufer zu bringen. Wie machte er das?*

Die Zitate und die abgebildeten Figuren stammen aus einem Spiel der Habermaaß GmbH [HAB].

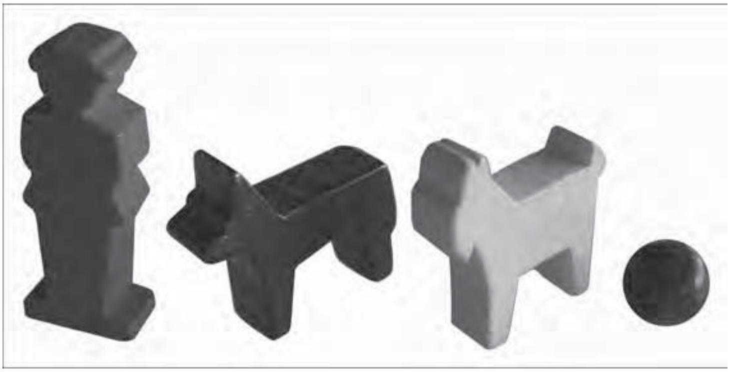


**Abbildung 10.1** Die an der Überfahrt Beteiligten

Das Rätsel stellt auch für Kinder keine übergroße Schwierigkeit dar, wenn man darauf hinweist, dass der Mann auch etwas vom gegenüberliegenden Ufer zurücktransportieren kann. In Abbildung 10.2 sieht man, wie der Mann die Ziege vom rechten Ufer, auf dem sich der Kohlkopf befindet, zurückfährt. Mit diesem Hinweis ist das Rätsel fast gelöst.

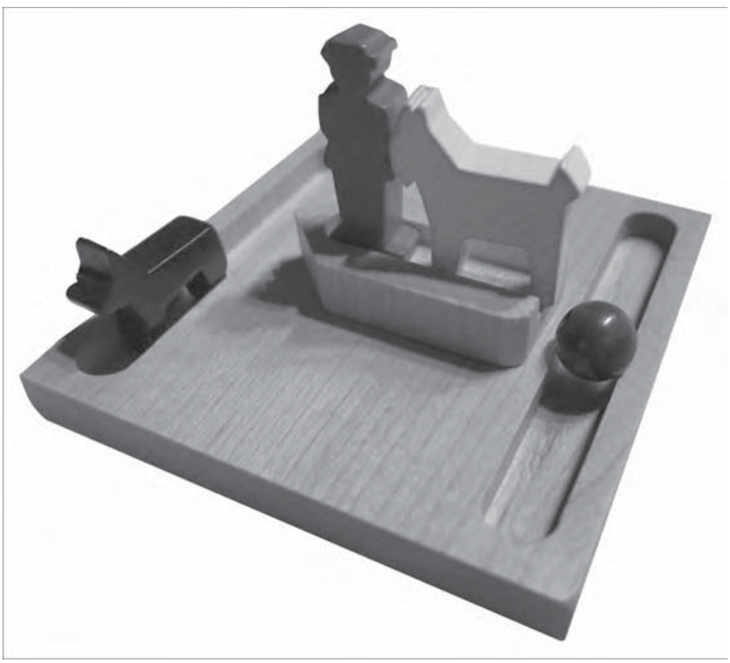


**Abbildung 10.2** Der Mann fährt mit der Ziege zurück.

## 10.2 Eine Lösung des Problems

In einer Darstellung des Überfahrtproblems liest man:

> *Und so wird's gemacht:*
>
> *Als Erstes rudert der Mann die Ziege zum gegenüberliegenden Ufer, kehrt zurück und setzt nun den Kohlkopf über, legt ihn ab, lädt die Ziege in den Kahn und fährt mit ihr zum Ausgangsufer. Hier lässt er die Ziege zurück und setzt nun den Wolf über. Der Kohlkopf bleibt jetzt mit dem Wolf am zweiten Ufer. Dann setzt der Mann zum Ausgangsufer zurück, lädt die Ziege ein und kehrt mit dieser zum Wolf und zum Kohlkopf zurück.*

Danach liest man noch: »Nur so ist eine glückliche Überfahrt möglich.« [HAB]

Hier beginnt nun das eigentliche Problem. Hat das Rätsel, wie behauptet wird, wirklich nur eine einzige Lösung? Dies soll jetzt systematisch untersucht werden.

## 10.3 Mathematische Hilfsmittel

Für unsere Untersuchung ist es zunächst erforderlich, dass sich alle verschiedenen Spielsituationen einfach beschreiben lassen. Im Folgenden steht also M für Mann, W für Wolf, Z für Ziege und K für den Kohlkopf. Sind z. B. Mann und Ziege am linken Ausgangsufer und Wolf und Kohlkopf schon übergesetzt, kann man dafür einfach die Menge {M,Z} notieren, denn es reicht aus festzustellen, wer sich am linken Ufer befindet. Der Rest ist dann am anderen Ufer (Abbildung 10.3).

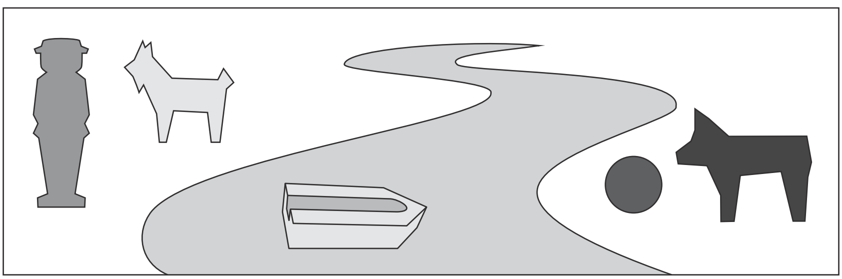


**Abbildung 10.3** Darstellung des Zustandes {M,Z}

Ein weiteres Beispiel: Der Zustand {M} bedeutet, dass der Mann am linken Ufer steht, am rechten Ufer dagegen Wolf, Ziege und Kohlkopf versammelt sind, was natürlich schreckliche Folgen hat.

Wie kann man jetzt alle möglichen Zustände notieren, ohne dabei einen zu vergessen? Wir erreichen das, indem wir die Zustände nummerieren. Der Zustand {M,Z} aus Abbildung 10.3 erhält die Nummer 1010. Dabei zeigen die einzelnen Stellen in der Reihenfolge MWZK an, wo sich die jeweiligen Akteure befinden. Eine Eins steht für das linke Ufer, eine Null für das rechte Ufer. In dieser Kodierung schreibt sich der Zustand {M} als 1000. Die kleinste dieser Zahlen ist 0000. Sie sagt aus, dass sich alle am rechten Ufer befinden. Die größte Zahl ist 1111, d. h. Mann, Wolf, Ziege und Kohl befinden sich am linken Ufer. Die Anzahl der möglichen Zustände ist also gleich der Anzahl der Zahlen von 0000 bis 1111.

Wer schon vom *Zweiersystem* gehört hat, weiß jetzt, dass es $2^4 = 16$ dieser Zahlen gibt, denn mit 1111 im Zweiersystem hat man auf 15 gezählt. Und berücksichtigt man dann noch die 0000, dann sind es 16 Zahlen. Doch keine Sorge, wenn Sie hier noch nicht mitkommen: Was genau das Zweiersystem ist, erfahren Sie gleich in Abschnitt 10.4, »Wie weit kann man mit n Stellen zählen?«.

Wem das Zweiersystem fremd ist, dem hilft Abbildung 10.4, in der von 0000 bis 1111 alle Zahlenkombinationen aufsteigend angeordnet und die zugehörigen Spielzustände angegeben sind. Dabei repräsentiert { } die leere Menge, d. h., niemand befindet sich am linken Ufer.

| 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| { } | {K} | {Z} | {Z,K} | {W} | {W,K} | {W,Z} | {W,Z,K} |

| 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| {M} | {M,K} | {M,Z} | {M,Z,K} | {M,W} | {M,W,K} | {M,W,Z} | {M,W,Z,K} |

**Abbildung 10.4** Alle möglichen Zustände des Überfahrtproblems

Eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen Dualzahlen und Mengen hat dafür gesorgt, dass kein Zustand vergessen wurde. Damit haben wir die vollständige Liste aller möglicher Zustände. Darunter befinden sich aber auch unerlaubte Zustände, die aussortiert werden müssen. {Z,K} ist so ein unerlaubter Zustand, denn die Ziege befindet sich mit dem Kohlkopf allein auf der linken Seite, was das Ende des Kohlkopfs bedeuten würde.

Entsprechend würde der Zustand {W,Z} die Ziege das Leben kosten. Ganz schlimm ist {W, Z, K}, denn hier frisst die Ziege den Kohlkopf, um dann selbst vom Wolf verspeist zu werden. Auch {M} ist nicht erlaubt, denn dann befinden sich Wolf, Ziege und Kohl zusammen am rechten Ufer, was nicht gut ausgehen kann. Entsprechend erkennt man auch {M,K} und {M,W} als unerlaubte Zustände. Damit bleiben folgende 10 Zustände, die erlaubt sind, übrig:

{}, {K}, {Z}, {W}, {W,K}, {M,Z}, {M,Z,K}, {M,W,K}, {M,W,Z}, {M,W,Z,K}

Durch »Kanten«, also waagerechte Striche, zwischen den erlaubten Zuständen lassen sich jetzt Überfahrten beschreiben. Dabei ist zu beachten, dass nur der Mann rudern kann, d. h., er muss in genau einem Eckpunkt einer Kante vorkommen. Außerdem kann sich die Zahl der Objekte um maximal zwei pro Überfahrt ändern.

**Was eine Kante zwischen {M,W,Z,K} und {W,K} bedeutet**

{M,W,Z,K}——{W,K} bedeutet, dass der Mann mit der Ziege ans andere Ufer gerudert ist, denn Wolf und Kohl bleiben am Ausgangsufer zurück.

**Warum zwischen {M,W,Z,K} und {M,Z} keine Kante erlaubt ist**

Beim Einzeichnen der Kanten ist zu beachten, dass nicht alle Kanten erlaubt sind, zum Beispiel darf zwischen {M,W,Z,K} und {M,Z} keine Kante gezeichnet werden, denn sonst wäre der Wolf mit dem Kohlkopf ans andere Ufer gerudert!

Ob zwischen zwei Zuständen eine Überfahrt möglich ist, können Sie Abbildung 10.5 entnehmen. Beispielsweise ist eine Überfahrt vom Zustand {W,K} in den Zustand {M,W,K} möglich, deshalb steht am Schnittpunkt von Zeile und Spalte der beiden Zustände eine 1. Wo dies nicht möglich ist, steht eine 0.

Es ist klar, dass in der Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten) lauter Nullen stehen. Außerdem ist das Schema spiegelsymmetrisch zu dieser Diagonalen, denn wenn man von Zustand A in den Zustand B gelangen kann, dann geht das auch umgekehrt.

| | { } | {K} | {Z} | {W} | {W,K} | {M,Z} | {M,Z,K} | {M,W,K} | {M,W,Z} | {M,W,Z,K} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| { } | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| {K} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| {Z} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| {W} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| {W,K} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| {M,Z} | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| {M,Z,K} | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| {M,W,K} | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| {M,W,Z} | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| {M,W,Z,K} | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Abbildung 10.5** Überfahrt möglich: 1, sonst 0

Abbildung 10.5 hilft jetzt bei der Lösung des Problems. Gesucht ist eine Folge von Überfahrten, die im Zustand {M,W,Z,K} beginnt und im Zustand {} endet. Also starten wir in der ersten Spalte der Abbildung ganz unten mit {M,W,Z,K}. Offenbar gibt es von diesem Zustand aus nur eine mögliche Kante. Das sehen Sie, wenn Sie die letzte Zeile nach rechts entlang schauen. Dort finden Sie genau eine 1, nämlich unter dem Zustand {W,K}. Blicken Sie von dieser 1 nach oben. Dort finden Sie eine 1, die zum Zustand {M,W,K} gehört. Jetzt wird es etwas komplizierter, denn wenn Sie nach links blicken, sehen Sie zwei Einsen. Die eine gehört zum Zustand {K}, die andere zum Zustand {W}. Unsere Folge von Kanten verzweigt sich hier. Suchen Sie sich eine der beiden Möglichkeiten aus und verfolgen Sie weiter das Ziel, in {} anzukommen.

In Abbildung 10.6 können Sie sehen, wie es weitergeht.

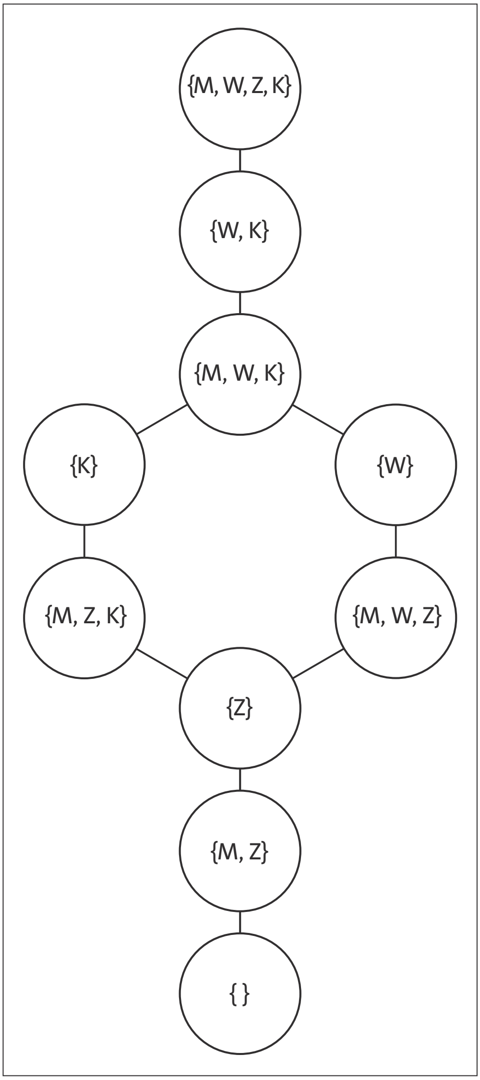



**Abbildung 10.6** Mögliche Pfade von {M,W,Z,K} nach {}

Diesem Graphen – so nennt man das Gebilde aus Knoten und Kanten – lässt sich jetzt entnehmen, dass es zwei Lösungen für das Überfahrtsproblem gibt. Der in der Draufsicht nach links abbiegende Pfad stimmt mit der in der Spielanleitung angegebenen Lösung des Problems überein. Der nach rechts abbiegende Pfad stellt eine weitere Lösung dar. Es lassen sich weitere Lösungen konstruieren, wenn man im mittleren Teil des Graphen Rundfahrten einlegt, jedoch haben diese alle eine größere Länge als die beiden zuvor angegebenen Lösungen. Sucht man im Internet nach dem Problem der Überfahrt, dann stößt man auf viele Vorlesungsskripte, in denen das Beispiel der Überfahrt zur Einführung in die Automatentheorie genutzt wird.

## 10.4 Wie weit kann man mit *n* Stellen zählen?

Sie haben zuvor gesehen, dass uns das Zweiersystem dabei geholfen hat, sämtliche Zustände ausfindig zu machen. Hier und im nächsten Abschnitt finden Sie weitere Informationen zum Zweiersystem.

Im Zehnersystem kann man mit einer Stelle von 0 bis $9 = 10^1 - 1$ zählen, mit zwei Stellen von 0 bis $99 = 10^2 - 1$ zählen, … , mit $n$ Stellen von 0 bis $10^n - 1$ zählen.

Entsprechend gilt im Zweiersystem:

Mit einer Stelle kann man von 0 bis $2^1 - 1 = 1$ zählen, nämlich 0, 1.

Mit zwei Stellen kann man von 0 bis $22 - 1 - 3$ zählen, nämlich 00, 01, 10, 11.

…

Mit $n$ Stellen kann man von 0 bis $2^n - 1$ zählen.

Daraus können Sie folgern, dass es $2^n$ verschiedene Zahlen mit $n$ Stellen im Zweiersystem gibt. Das können Sie sich auch anders klarmachen: Auf die 1. Stelle der $n$-stelligen Zahl können Sie 0 oder 1 schreiben. Das sind 2 Möglichkeiten. Dies gilt auch für die zweite Stelle usw.

Es gibt also $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ mögliche Zahlen aus $n$ Stellen im Zweiersystem.

## 10.5 Vom Zweier- ins Zehnersystem und umgekehrt

Bekannt ist Ihnen die Bedeutung einer Zahl wie z. B. 1234 im Zehnersystem. Wie man schon in der Grundschule lernt, handelt es sich dabei um 4 Einer, 3 Zehner, 2 Hunderter und einen Tausender. Anders geschrieben ist $1234 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$.

Während im Zehnersystem die sogenannten *Stufenzahlen* die Potenzen der Zahl 10 sind, gibt es im Zweiersystem die Stufenzahlen $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$

Im Zehnersystem gibt es die Ziffern 0, 1, 2, … ,9. Im *Zweiersystem* hat man es nur mit den Ziffern 0 und 1 zu tun.

Im Zweiersystem bedeutet 1001 also $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Rechnet man diese Summe aus, so erhält man $8 + 0 + 0 + 1 = 9$. 1001 stellt also die Zahl 9 im Zweiersystem dar. Damit können Sie vom Zweiersystem ins Zehnersystem umrechnen. Aber wie rechnet man vom Zehnersystem ins Zweiersystem um?

Dazu schauen wir uns zunächst ein Beispiel aus dem Zehnersystem an. Wir betrachten wieder die Zahl 1234 und fragen uns, wie man die zweite Ziffer von rechts erhält. Zu ihr gehört die Zehnerpotenz $10^1$. Man berechnet zunächst $1234 / 10^1 = 123{,}4$.

Wenn man an die Ziffer zum Stellenwert $10^1$ kommen will, muss die 4 hinter dem Komma beseitigt werden. Dies gelingt dadurch, dass man die Ganzzahl von 123,4 bildet. Diese entsorgt den Nachkommateil für uns: Ganzzahl(123,4) = 123

Damit sind wir unserem Ziel schon nähergekommen. Wenn wir jetzt 123 durch 10 teilen und vom Ergebnis den Rest nehmen, dann ergibt sich die gewünschte 3:

123 / 10 = 12 Rest 3.

Diese Methode lässt sich entsprechend auf das Zweiersystem übertragen.

Wie lautet die 3. Ziffer von rechts für die Zahl 13 im Zweiersystem? Zu dieser Ziffer gehört die Stufenzahl $2^2$. Also rechnet man $13 / 2^2 = 3{,}25$. Anschließend kommt die Ganzzahl ins Spiel:

Ganzzahl(3,25) = 3

3 / 2 = 1 Rest 1.

Die Zahl 13 hat die Darstellung 1101 im Zweiersystem, und tatsächlich ist die 3. Ziffer von rechts gleich 1.

Auf diese Weise können Sie jede Ziffer der Zahl im Zweiersystem berechnen. Um nicht nur die 3. Ziffer von rechts, sondern alle Ziffern zu berechnen, gehen Sie wie folgt vor:

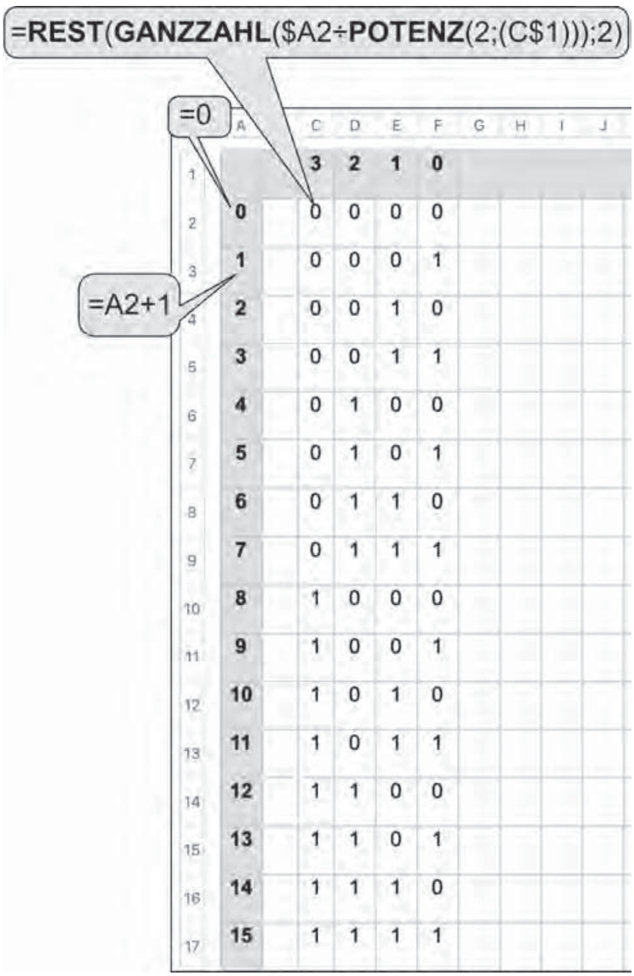
**Umwandlung der Zahl 13 ins Zweiersystem**

1. Suchen Sie die nächste Zweierpotenz, die kleiner oder gleich 13 ist. In unserem Beispiel ist das $2^3 = 8$. Im Zweiersystem hat 8 die Darstellung 1000. Also hat 13 im Zweiersystem $n = 4$ Stellen.
2. Berechnen Sie die von links betrachtet 1. Ziffer. Zu dieser Ziffer gehört die Stufenzahl $2^{n-1} = 2^3$. Bilden Sie deshalb $13 / 2^3 = 13 / 2^3 = 1{,}625$. Beseitigen Sie den Nachkommateil: Ganzzahl(1,625) = 1. Berechnen Sie den Rest bei Division durch 2: 1 / 2 = 0,5 = 0 Rest 1. Die gesuchte erste Ziffer ist gleich dem Rest, das heißt gleich 1.
3. Wiederholen Sie den Schritt 2 für die 2. Stelle von links und so weiter, bis Sie bei der letzten Stelle angelangt sind.

Das hier beschriebene Vorgehen können Sie leicht in ein Tabellenblatt umsetzen, was im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

## 10.6 Zum Mitmachen: Eine Tabelle für die Zahlen des Zweiersystems

Was Sie im letzten Abschnitt gelesen haben, können Sie nun ausprobieren. Erstellen Sie ein Tabellenblatt, mit dem Sie die Zahlen 0 bis 15 im Zweiersystem darstellen können. Tragen Sie dazu zuerst die Hochzahlen der Zweierpotenzen 3, 2, 1 und 0 in der ersten Zeile ein. Erzeugen Sie in der Spalte A die Zahlen 0 bis 15. Dann füllen Sie die Zelle C2 wie in Abbildung 10.7 aus. Was in dieser Zelle steht, entspricht dem im vorigen Abschnitt geschilderten Verfahren. Füllen Sie anschließend nach rechts und nach unten aus.




| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 2 | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 3 | | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 4 | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 5 | | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 6 | | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 9 | 7 | | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 8 | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 9 | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 12 | 10 | | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 13 | 11 | | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 14 | 12 | | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 13 | | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 16 | 14 | | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 17 | 15 | | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Abbildung 10.7** Tabelle für alle vierstelligen Zahlen des Zweiersystems

Wenn Sie in der ersten Zeile statt 3, 2, 1, 0 die Zahlen 4, 3, 2, 1, 0 eintragen, können Sie alle fünfstelligen Dualzahlen erzeugen.

# Kapitel 23
# Warum Kanaldeckel rund sind

*Haben Sie schon einmal versucht, den Deckel eines Kochtopfs in den Topf hineinzubringen? Das wird Ihnen nicht gelingen. Genauso wenig kann ein Kanaldeckel in den Schacht fallen, den er sonst bedeckt.*

## 23.1 Das Gleichdick

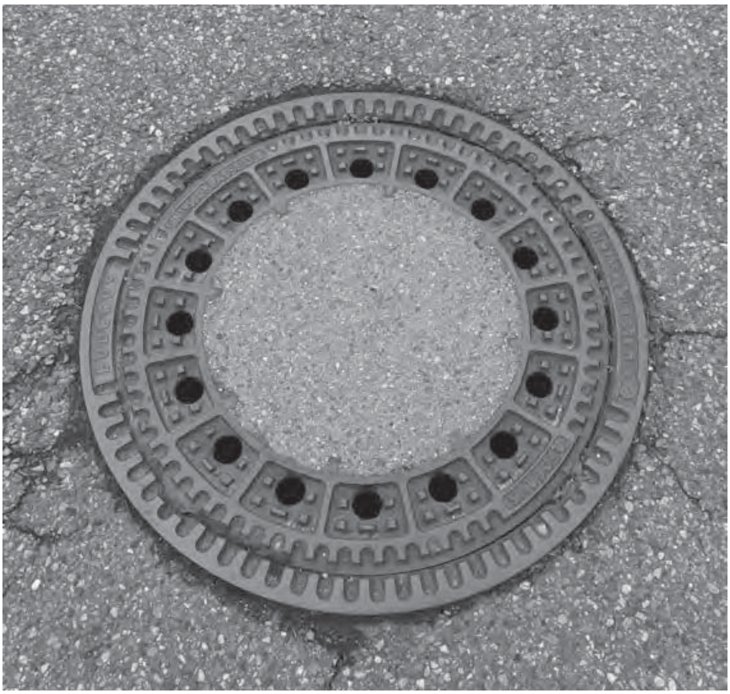


**Abbildung 23.1** Ein Kanaldeckel

In Bewerbungsgesprächen von Microsoft wurde unter anderem gefragt, warum Kanaldeckel rund sind. Man könnte sich durchaus auch einen quadratischen Kanaldeckel vorstellen. Für die Bevorzugung der runden Form gibt es dagegen eine Reihe von Gründen. So lassen sich runde Schachtdeckel leicht rollend transportieren, was bei einem Deckelgewicht von mehr als 50 kg wichtig ist. Entscheidend aber ist, dass ein runder abgenommener Deckel nicht in den Schacht fallen kann, was bei einem quadratischen Deckel durchaus möglich ist. Dieser müsste sich dazu nur diagonal über der Öffnung befinden, um in den Schacht stürzen zu können, was kein Vergnügen für die Person wäre, die gerade unten im Schacht arbeitet. In Abbildung 23.2 ist dies für einen quadratischen Deckel mit der Seitenlänge 1 illustriert. Die Diagonale des Schachts hat demnach die Länge 1,41 (genauer $\sqrt{2}$), so dass der Deckel nach dem Aufrichten und geeigneten Verschieben in den Schacht fallen kann.

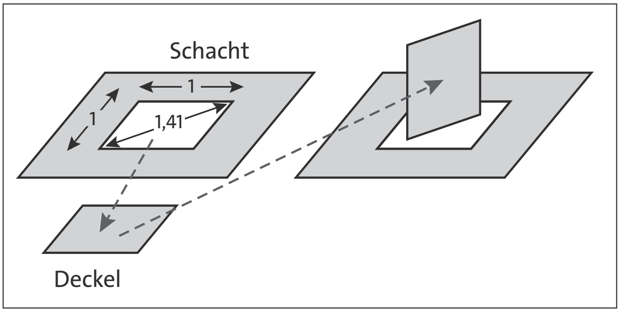



**Abbildung 23.2** Ein quadratischer Deckel kann in den Schacht fallen.

Dass ein runder Deckel nicht abstürzen kann, ist leicht in der Küche nachzuvollziehen. Versucht man, einen Deckel in den dazugehörigen Topf zu bugsieren, wird man feststellen, dass dies nicht möglich ist. Das liegt daran, dass ein Kreis ein sogenanntes *Gleichdick* ist.

**Abbildung 23.3** Topf mit Deckel

Dreht man die beiden in Abbildung 23.4 gezeichneten Parallelen um den Kreis, dann ist der Abstand der beiden Parallelen immer gleich dem Kreisdurchmesser. Also ist der Kreis ein Gleichdick.

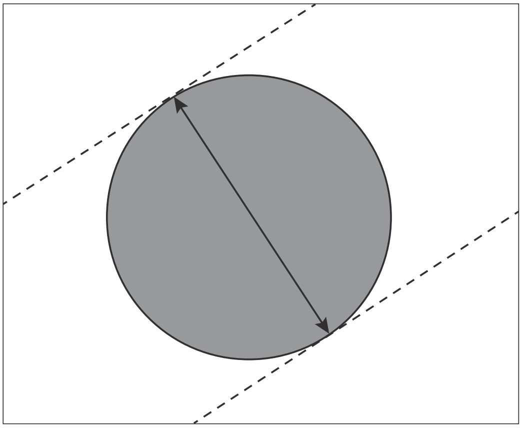


**Abbildung 23.4** Erklärung des Begriffs »Gleichdick«

Uns als Mathematiker interessiert natürlich, ob der Kreis das einzige mögliche Gleichdick ist. Das ist nicht der Fall. Ein nicht kreisförmiges Gleichdick ist beispielsweise das *Reuleaux-Dreieck* (Franz Reuleaux, 1829–1905, Professor für Maschinenbau). Ausgehend von dem gleichseitigen Dreieck ABC der Abbildung 23.5 konstruiert man, mit dem Mittelpunkt A, einen Kreisbogen durch B und C. Dasselbe führt man mit den Mittelpunkten B und C durch. Löscht man dann das Dreieck ABC, bleibt das Reuleaux-Dreieck übrig.

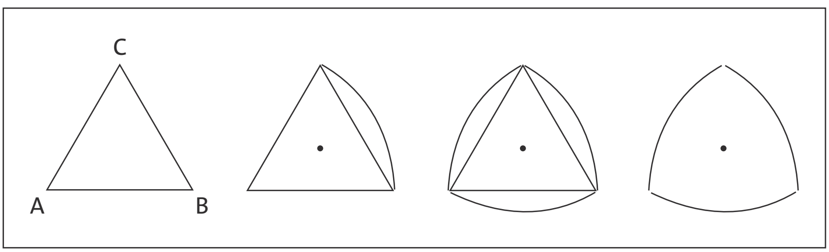



**Abbildung 23.5** Konstruktion des Reuleaux-Dreiecks

Jetzt muss man sich nur noch klarmachen, dass das Reuleaux-Dreieck auch ein Gleichdick ist. Dazu zeichnet man ein paralleles Geradenpaar, wobei eine der Geraden durch eine Ecke des Reuleaux-Dreiecks geht, die andere eine Tangente an den gegenüberliegenden Kreisbogen ist.

Verschiebt man jetzt den Punkt *X* längs des Kreisbogens, dann ändert sich zwar die Ausrichtung des Parallelenpaars, nicht aber die Länge der Strecke *XY*, das heißt, die Dicke *d* ist immer gleich dem Radius des von *Y* aus konstruierten Kreisbogens.

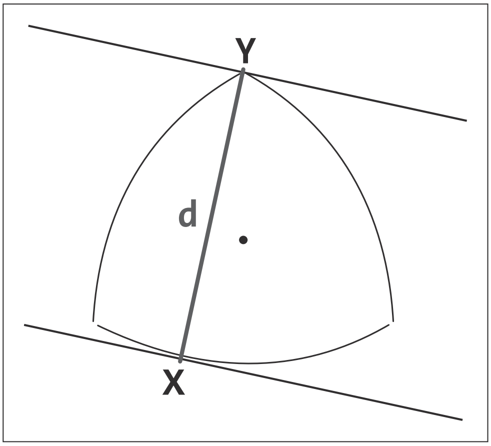



**Abbildung 23.6** Reuleaux-Dreieck als Gleichdick

Weil das Reuleaux-Dreieck ein Gleichdick ist, könnte man es auch als Kanaldeckel verwenden, vorausgesetzt natürlich, dass der Schachtquerschnitt gleich dem Reuleaux-Dreieck ist. Vorteilhaft daran wäre der geringere Materialverbrauch gegenüber dem kreisrunden Deckel. Ein Nachteil wäre, dass man beim Aufsetzen des Deckels auf den Schacht diesen erst geeignet drehen muss.

Weil das Reuleaux-Dreieck überall die gleiche Dicke hat, ist es möglich, zwei Parallelenpaare so zu bilden, dass sie das Reuleaux-Dreieck als Quadrat umgeben. Dieses Quadrat kann man um das Reuleaux-Dreieck herumdrehen, bzw. kann man auch das Reuleaux-Dreieck drehen und das Quadrat dabei festhalten, das heißt, das Reuleaux-Dreieck kann innerhalb des Quadrats rotieren. Es ist allerdings nicht ganz so einfach, wie sich das gerade anhört. Für das Reuleaux-Dreieck gibt es nämlich kein fixes Rotationszentrum. Der Mittelpunkt des Dreiecks wandert bei der Rotation auf einem Pfad, der von 4 Ellipsenbögen gebildet wird.

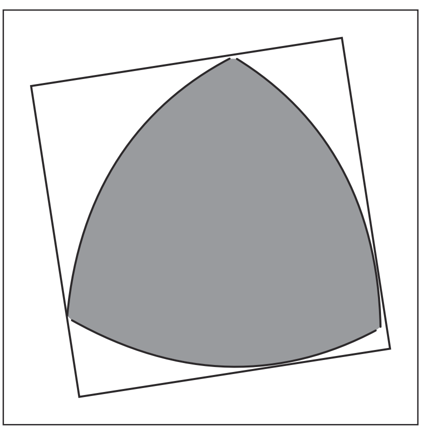


**Abbildung 23.7** Reuleaux-Dreieck im Quadrat

Die Möglichkeit, das Reuleaux-Dreieck innerhalb eines Quadrates rotieren zu lassen, führt zu verschiedenen Anwendungen. Am bekanntesten ist der Wankelmotor, bei dem die Verbrennungsenergie ohne Umweg einer Hubbewegung in eine Drehbewegung umgesetzt wird.

Weil bei der Drehung des Reuleaux-Dreiecks in dem Quadrat fast 99 % der Quadratfläche überstrichen wird, kann man damit einen Bohrer konstruieren, der annähernd quadratische Löcher bohrt. Diesen Bohrer erfand Harry James Watt im Jahr 1914. Der wesentliche Teil der Erfindung war ein Mechanismus, der die Rotation des Mittelpunktes des Reuleaux-Dreiecks auf der exzentrischen Bahn bewirkte.

Man kann weitere Gleichdicke erzeugen, wenn man anstelle eines Dreiecks als Ausgangsfigur ein Fünfeck, Siebeneck usw. wählt und dieselbe Konstruktion wie zuvor durchführt. So sind zum Beispiel die 20- und die 50-Pence-Münzen in England Reuleaux-Siebenecke. Sehbehinderte können diese Münzen leicht ertasten. Wegen der Gleichdick-Eigenschaft passen die Münzen auch in alle Münzapparate. Außerdem ist der Materialverbrauch für eine solche Münze geringer als für eine kreisförmige Münze.

## 23.2 Flächeninhalte der Gleichdicke

Man kann zeigen, dass von allen Gleichdicken der Dicke *d* das Reuleaux-Dreieck den kleinsten Flächeninhalt und der Kreis den größten Flächeninhalt besitzen. Um diese Aussage etwas einzugrenzen, werden hier diese beiden Flächeninhalte berechnet.

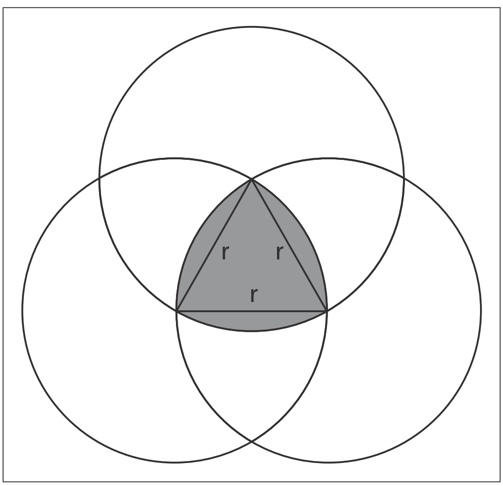



**Abbildung 23.8** Reuleaux-Dreieck mit Konstruktionslinien

Die Winkel des Ausgangsdreiecks der Abbildung 23.8 betragen, weil das Dreieck gleichseitig ist, $\pi/3$ (das heißt 60°).

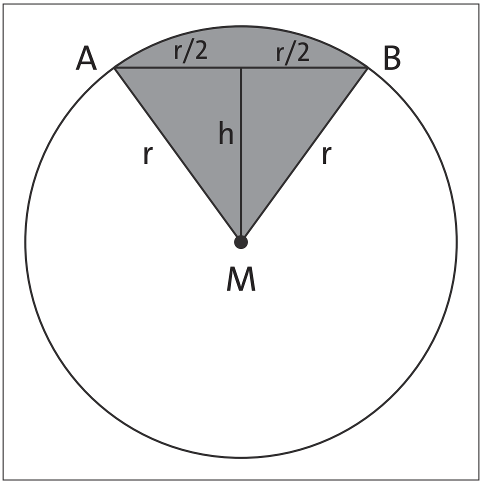



**Abbildung 23.9** Ein Ausschnitt aus Abbildung 23.8

Der Flächeninhalt des Sektors der Abbildung 23.9 ergibt sich zu

$A_{Sektor} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} \cdot r^2\pi = \frac{\pi}{6} r^2.$

Möchte man nur das Kreissegment haben, muss man von der eben berechneten Sektorfläche den Inhalt des Dreiecks *MAB* subtrahieren.

Für dieses Dreieck gilt: $r^2 = h^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$

Daraus folgt: $h^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$ bzw. $h = \frac{\sqrt{3}}{2} r$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks *MAB* ergibt sich also:

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} r \cdot \frac{1}{2} r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

Damit erhält man den Flächeninhalt des Segments zu

$$A_{Segment} = A_{Sektor} - A_{Dreieck} = \frac{\pi}{6} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) r^2$$

Das Reuleaux-Dreieck besteht aus drei solchen Segmenten und dem Dreieck MAB. Also ergibt sich der Flächeninhalt des Reuleaux-Dreiecks zu:

$$A_{Reuleaux} = 3 \cdot A_{Segment} + A_{Dreieck} =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) r^2 = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right) r^2$$

$$\approx 0{,}7048 r^2$$

Der Kreis, der dieselbe Dicke $d = r$ wie das Reuleaux-Dreieck besitzt, hat den Radius $r/2$. Sein Flächeninhalt ist deshalb gleich $\left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi \approx 0{,}7853r^2$.

Alle möglichen Gleichdicke der Dicke $d = r$ haben einen Flächeninhalt, der zwischen $0{,}7048\ r^2$ und $0{,}7853\ r^2$ liegt.

## 23.3 Der Umfang der Gleichdicke

Auch über den Umfang der Gleichdicke kann man eine Aussage machen. Diese liefert der *Satz von Barbier* (Joseph-Émile Barbier, 1839–1889), der hier nur zitiert werden kann:

**Satz von Barbier**

Der Umfang eines Gleichdicks mit der Dicke $d$ ist gleich $U = d \cdot \pi$.

Man kann diesen Satz auch so formulieren: Der Umfang eines Gleichdicks der Dicke $d$ ist gleich dem Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser gleich der Dicke $d$ des Gleichdicks ist.

Am Reuleaux-Dreieck soll dieser Satz überprüft werden.

Der Umfang des Reuleaux-Dreiecks besteht aus drei Kreisbögen, von denen jeder die Länge $r \cdot \frac{\pi}{3}$ besitzt. Also ist der Umfang gleich $r \cdot \pi$.

Der Kreis, der dieselbe Dicke $d = r$ wie das Reuleaux-Dreieck besitzt, hat den Radius $r/2$. Sein Umfang ist deshalb gleich $2\frac{r}{2}\pi = r\pi$.

Der Satz von Barbier ist also für diesen Spezialfall bestätigt worden.

## 23.4 Zum Mitmachen: Zeichnen Sie ein Reuleaux-Dreieck

Konstruieren Sie ein Reuleaux-Dreieck wie in Abbildung 23.10. Nicht eingezeichnet ist die $x$-Achse, die durch die Punkte $A$ und $B$ verläuft. Die $y$-Achse geht durch den Punkt $C$.

Ausgangspunkt ist das gleichseitige Dreieck ABC, dessen Seiten die Länge 2 besitzen. Die Koordinaten der Punkte $A$ und $B$ sind $(-1/0)$ und $(1/0)$. Die $y$-Koordinate von $C$ muss noch bestimmt werden. Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich $2^2 = c^2 + 1^2$, woraus sich $c = \sqrt{3}$ ergibt.

Um die Kreisbögen berechnen zu können, müssen zunächst die Gleichungen der Kreise um $A$, $B$ und $C$ bestimmt werden. Bekanntlich hat ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(a/b)$ und dem Radius $r$ die Gleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

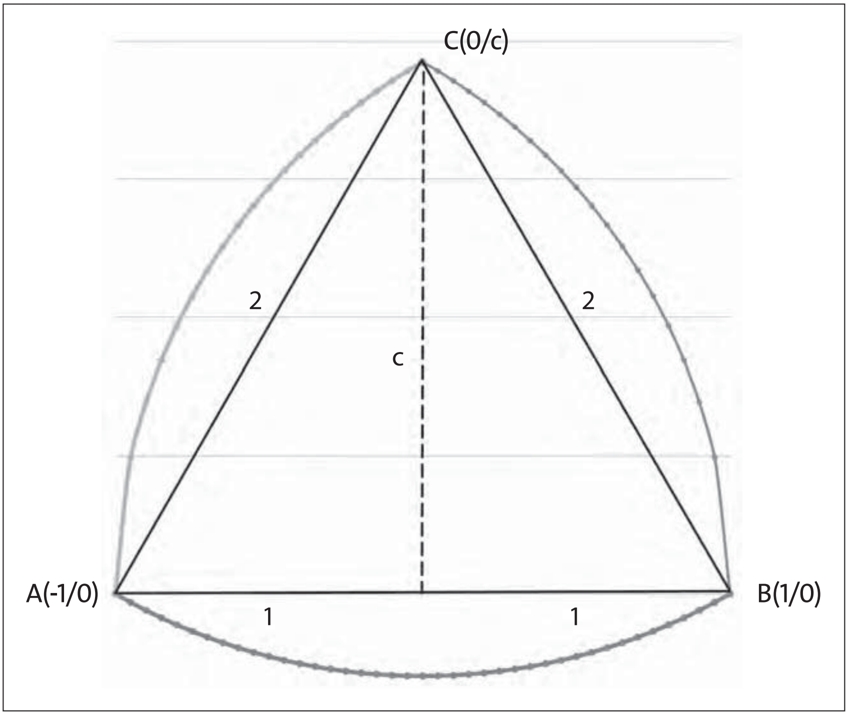



**Abbildung 23.10** Reuleaux-Dreieck

Daraus ergeben sich folgende Kreisgleichungen:

Kreis um $A$: $\left(x-(-1)\right)^2+y^2=4$

Kreis um $B$: $(x-1)^2+y^2=4$

Kreis um $C$: $x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=4$

Für den Kreis um A gilt: $y^2=4-(x+1)^2$, woraus folgt:

$y_1=\sqrt{4-(x+1)^2}$; $y_2=-\sqrt{4-(x+1)^2}$.

Der Bogen zwischen $B$ und $C$ liegt oberhalb der $x$-Achse, so dass er durch $y_1$ beschrieben wird. Damit nur der Kreisbogen gezeichnet wird, muss $x$ die Bedingung $0 \leq x \leq 1$ erfüllen.

Der Kreisbogen BC hat damit die Gleichung

$y=\sqrt{4-(x+1)^2}$, $0 \leqq x \leqq 1$.

Entsprechend ergeben sich die beiden anderen Kreisbögen:

$y=\sqrt{4-(x-1)^2}$, $-1 \leqq x \leqq 0$ und $y=\sqrt{3}-\sqrt{4-x^2}$, $-1 \leqq x \leqq 1$

Lassen Sie diese drei Kreisbögen zeichnen, um das Reuleaux-Dreieck zu erzeugen (zum Zeichnen in der Tabellenkalkulation können Sie sich in Abschnitt 27.4, »Ein Diagramm erstellen«, informieren).

# Kapitel 26
# Große und kleine Zahlen

*Können Sie auf Anhieb sagen, wie viele Nullen eine Milliarde oder eine Billion besitzt? Falls nicht, machen Sie sich keine Sorgen, es gibt prominente Vorbilder, die dies auch nicht können. In diesem Kapitel erfahren Sie etwas über große und kleine Zahlen und wie man diese geeignet darstellen kann.*

## 26.1 Der Schuldenstand in Deutschland

Am 10. Juli 2024 veröffentlichte die Tageszeitung »Die Rheinpfalz« die Meldung »Schuldenstand so hoch wie noch nie«. Darin konnte man lesen, dass »Deutschland mit 2500 Milliarden Euro verschuldet ist« (aktuelle Informationen zum Schuldenstand findet man beim Bund der Steuerzahler: *https://www.steuerzahler.de*). Offenbar wurden die Schulden in der Einheit *Milliarden* angegeben, weil bei Haushaltsverhandlungen mittlerweile nur noch mit »Milliarden« hantiert wird und weil jeder glaubt, dass er sich eine Milliarde Euro vorstellen kann. Aber hat man wirklich eine Vorstellung davon, wie viel eine Milliarde ist und was 2500 Milliarden = 2,5 Billionen bedeuten?

Nach der Bundestagswahl 2025 wurde im Koalitionsvertrag der neu gewählten Regierung angekündigt, Schulden im Umfang von 500 Milliarden für die dahinsiechende Infrastruktur machen zu wollen. Damit wäre der Schuldenstand bei 3 Billionen. Hinzu kommen noch unbekannte Ausgaben für die Ertüchtigung der Bundeswehr.

Viele Menschen scheitern schon an der Frage, wie viele Nullen die Zahlen Milliarde bzw. Billion haben. Ein prominentes Beispiel dafür ist der ehemalige deutsche Wirtschaftsminister Martin Bangemann (Wirtschaftsminister von 1984 bis 1988), der in einem Interview die Anzahl der Nullen einer Milliarde erst auf sieben, dann auf acht geschätzt hatte.

Können Sie auf Anhieb die Anzahl der Nullen einer Billion nennen? Ich selbst beginne bei der Zahl Tausend und hangele mich dann in Dreierschritten nach oben bis zu den Millionen, Milliarden und Billionen:

Tausend: $1\,000 = 10^3$

Million: $1\,000\,000 = 10^6$

Milliarde: $1\,000\,000\,000 = 10^9$

Billion: $1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$

Selbst wenn man die Anzahl der Nullen großer Zahlen kennt, ist noch nicht gewährleistet, dass man eine Vorstellung von der Größe solcher Zahlen hat.

## 26.2 Wie kann man die Größe von Zahlen verstehen?

Im Folgenden gebe ich Ihnen einige Beispiele, um die Größe von Zahlenwerten besser nachvollziehen zu können. Für kleine Zahlen ist dies relativ einfach.

- Die Zahl 10 kann man mit der Anzahl der Finger beider Hände verstehen.
- Die Anzahl der Bekannten eines Menschen beträgt etwa 150 Personen, 50 davon gehören zum engeren Freundeskreis. Damit kann man sich die Zahl 100 veranschaulichen.
- Wenn sich alle Schüler eines deutschen Gymnasiums von durchschnittlicher Größe auf dem Schulhof versammeln, blickt man auf etwa 1000 Personen.
- Lässt man beim Besuch einer Buchhandlung den Blick über die Regale schweifen, wird man ca. 10 000 Bücher erblicken.
- Das Olympiastadion in Berlin war ursprünglich für 100 000 Zuschauer angelegt. Seit 2004 gibt es dort 74 475 Sitzplätze, aber man gewinnt trotzdem einen Eindruck von der Zahl 100 000.
- Für ein Haus in gehobener Lage werden mittlerweile schon Preise von einer Million Euro genannt.

Eine Milliarde sind gleich 1000 Millionen, in Zahlen dargestellt also $1\,000\,000\,000 = 1000 \cdot 1\,000\,000$. Lassen sich diese Größenordnungen veranschaulichen? Bekannt ist, dass die Erdbevölkerung zurzeit etwa 8,2 Milliarden Menschen zählt. Aber man kann diese Menschen schlecht auf einem großen Platz aufstellen, um einen Überblick zu bekommen. Noch weniger kann man sich eine Billion vorstellen. Eine Billion sind 1000 Milliarden oder auch eine Million Millionen, denn es ist $10^6 \cdot 10^6 = 10^{12}$.

Aus diesen Gründen wird hier ein anderer Weg zur Veranschaulichung von Milliarden und Billionen beschritten. Wer jemals Micky-Maus-Hefte gelesen hat, dem ist der unermesslich reiche Dagobert Duck bekannt.

Um sein Geld zu bewahren, hatte sich Dagobert Duck einen riesigen Geldspeicher gebaut. Des Öfteren sprang er kopfüber in diesem Geldspeicher in sein Geld, um darin zu »baden«. Da die Maße des Duck'schen Geldspeichers nicht bekannt sind, aber die Idee des Badens verfolgt werden soll, werden hier zur Veranschaulichung Olympia-Schwimmbecken verwendet. Ein Schwimmbecken der Olympischen Spiele muss besondere Kriterien erfüllen, für seine Dimensionen gilt:

Länge: 50 m

Tiefe: mind. 2,5 m

Breite: 25 m

**Abbildung 26.1** Dagobert Duck

Als geometrische Form stellt ein solches Becken einen Quader mit diesen Abmessungen dar, wie in Abbildung 26.2 zu sehen ist.

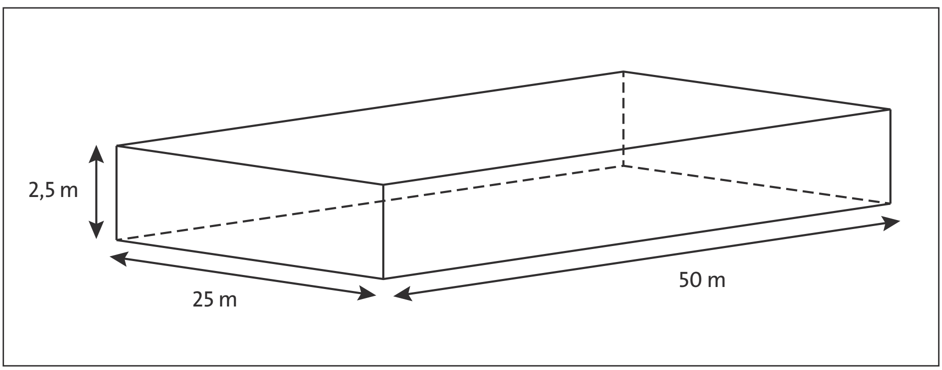



**Abbildung 26.2** Olympisches Schwimmbecken

Das Volumen eines solchen Schwimmbeckens erhält man durch die bekannte Beziehung »Länge mal Breite mal Höhe«. In diesem Fall bedeutet dies:

$50\ \text{m} \cdot 25\ \text{m} \cdot 2{,}5\ \text{m} = 3125\ \text{m}^3$

**Abbildung 26.3** Stadionbad Neustadt/Weinstraße mit olympischen Abmessungen

## 26.3 Deutschlands Schulden in olympischen Schwimmbecken

Die Frage ist nun, ob eine Milliarde oder gar eine Billion Euro ein solch riesiges Schwimmbecken füllen können. Natürlich muss man sich zunächst einigen, in welchen Scheinen diese Geldbeträge im Becken gestapelt werden sollen. Wir verwenden hier 100-Euro-Scheine.


**Abbildung 26.4** 100-Euro-Schein

Für einen 100-Euro-Schein gilt:

Dicke: 0,1 mm = 0,0001 m

Länge: 147 mm = 14,7 cm = 0,147 m

Breite: 82 mm = 8,2 cm = 0,082 m

Das Volumen eines 100-Euro-Scheins ist damit gleich

$0{,}0001\ \text{m} \cdot 0{,}147\ \text{m} \cdot 0{,}082\ \text{m} = 0{,}0000012054\ \text{m}^3$.

3 Billionen Euro bestehen aus $3 \cdot 10^{10}$ Scheinen zu je 100 Euro. Das Volumen all dieser Scheine ist damit gleich

$3 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}0000012054\ \text{m}^3 = 36162\ \text{m}^3$.

Schon jetzt sieht man, dass ein einziges Olympia-Schwimmbecken vom Volumen 3125 $\text{m}^3$ bei Weitem nicht ausreicht, um drei Billion in 100-€-Scheinen aufzunehmen. Es stellt sich daher die Frage: Wie viele Olympia-Schwimmbecken werden benötigt, um diese Menge unterzubringen?

Weil jedes der Schwimmbecken das Volumen 3125 $\text{m}^3$ besitzt, erhält man deren gesuchte Anzahl zu: $36162\ \text{m}^3 : 3125\ \text{m}^3 \approx 11{,}57$.

Man benötigt demnach 12 Olympia-Schwimmbecken, um 3 Billion Euro in 100-€-Scheinen aufzunehmen (dabei ist das letzte Becken nicht vollständig gefüllt).

## 26.4 Der Schuldenberg als Würfel

Kehrt man zu Dagobert Duck zurück, dessen Geldspeicher immer in Würfelform dargestellt wird, so stellt sich die Frage, wie groß die Kantenlänge eines Würfels sein muss, damit Dagobert Duck darin 3 Billionen Euro in 100-€-Scheinen aufbewahren kann. Weil das Volumen eines Würfels gleich $a^3$ ist, wobei $a$ die Kantenlänge des Würfels ist, ergibt sich folgende Gleichung:

$a^3 = 36162\ \text{m}^3$

Daraus folgt $a = \sqrt[3]{36162 m^3} \approx 33{,}07 m$.

Haben Sie schon einmal auf dem 10-m-Sprungturm eines Schwimmbades gestanden und sind dann ob der Höhe schaudernd die Treppe wieder hinuntergestiegen? Dann können Sie sich vorstellen, was 33 Meter bedeuten. 33 Meter hoch, 33 Meter breit, 33 Meter lang, diese gigantischen Ausmaße sind erforderlich, um die Staatsschulden von Deutschland in 100-€-Scheinen in einem Würfel unterzubringen. Abbildung 26.5 zeigt Ihnen einen solchen Würfel, daneben ein Einfamilienhaus mit der Firsthöhe 7 m. Und wenn Sie genau hinschauen, können Sie auch einen Menschen ausfindig machen.

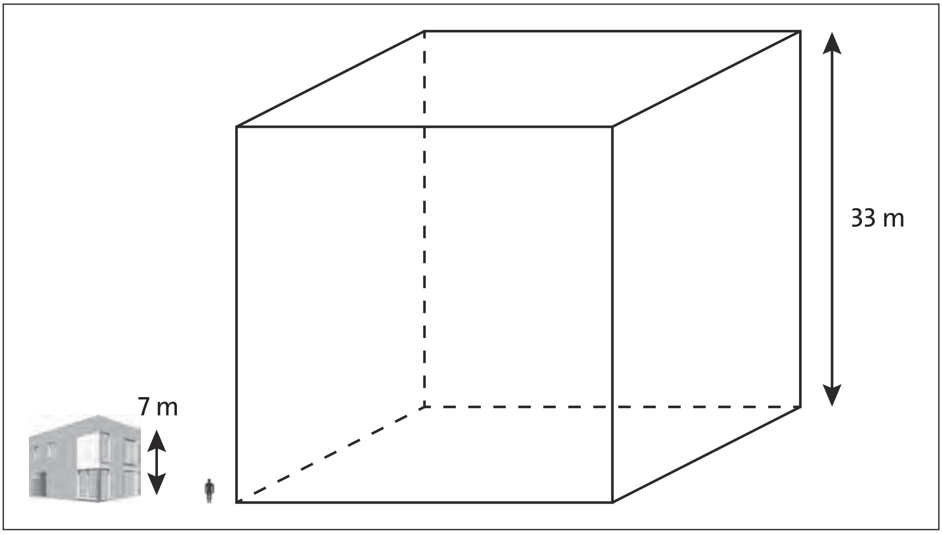



**Abbildung 26.5** Vergleich Einfamilienhaus mit »Schuldenwürfel«

## 26.5 Logarithmische Skalen

Große Zahlen tauchen nicht nur bei Schulden auf. Die Bahn des Mondes um die Erde hat den Durchmesser von $10^9$ Metern. Der Durchmesser unseres Sonnensystems ist ungefähr $10^{13}$ Meter. Dagegen gibt es auch sehr kleine Zahlen. Die Facetten im Fliegenauge haben eine Größe von 0,0001 m = $10^{-4}$ m. Ein Kohlenstoffatom besitzt die Größe von etwa $10^{-12}$ m. Die Bausteine unserer Materie, die Quarks, befinden sich in der Größe von $10^{-15}$ m.

Quarks: 0,000 000 000 000 001 Meter = $10^{-15}$ Meter

Größe Kohlenstoffatom: 0,000 000 000 001 Meter = $10^{-12}$ Meter

Facetten im Fliegenauge: 0,000 1 Meter = $10^{-4}$ Meter

Bahn des Mondes um die Erde: 1 000 000 000 Meter = $10^9$ Meter

Durchmesser Sonnensystem: 10 000 000 000 000 Meter = $10^{13}$ Meter

Sie sollen nun eine Skala anfertigen, auf der Sie diese Größen darstellen können. Wenn Sie darüber etwas nachdenken, werden Sie feststellen, dass Sie für diese Aufgabe keine übliche lineare Skala konstruieren können. Dies ist wegen des riesigen Zahlenbereichs von $10^{-15}$ bis $10^{13}$ nicht möglich. Es liegt aber nahe, dass man einfach die Hochzahlen der Zehnerpotenzen, also der Zahlen von –15 bis 13, zur Darstellung verwendet.

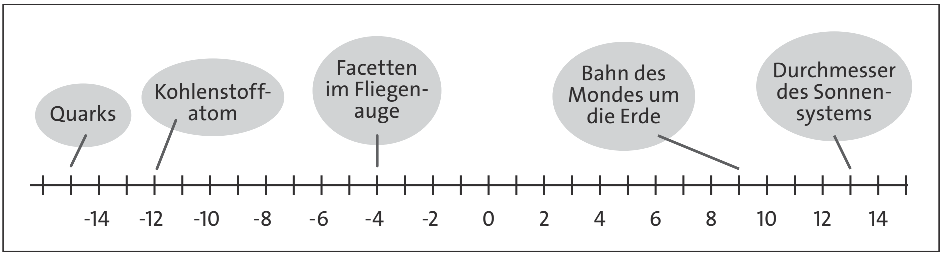



**Abbildung 26.6** Dimensionen des Lebens

Um einen Bezug zu den ursprünglich darzustellenden Zahlen zu haben, schreibt man statt der Hochzahlen die Zehnerpotenzen an die Skala:

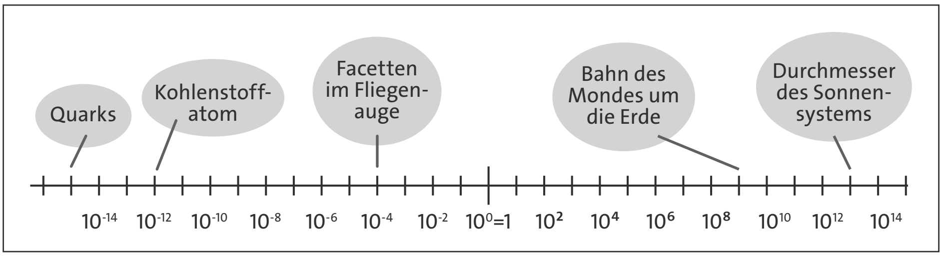



**Abbildung 26.7** Abbildung 27.6 mit Zehnerpotenzen

Bei der Verwendung der Skala muss man beachten, dass die optisch gleich langen Teilintervalle der Skala jeweils einen Faktor 10 vom Ausgangs- zum Endwert eines Intervalls bedeuten (Abbildung 26.8).

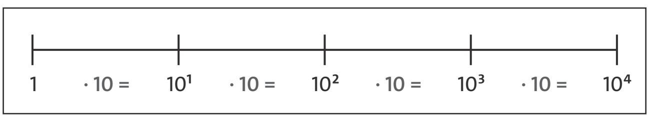



**Abbildung 26.8** Logarithmische Skala

Diese Eigenschaft ist ungewohnt, denn meistens kennt man nur die *lineare Skala*, bei der jedes Teilintervall die gleiche Länge darstellt (Abbildung 26.9).

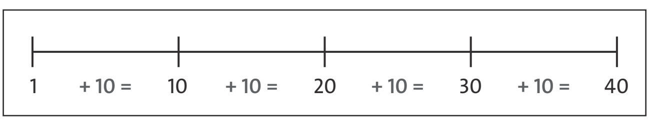



**Abbildung 26.9** Lineare Skala

Anwendungen für logarithmische Skalen gibt es viele. Am bekanntesten dürfte die Richter-Skala sein, mit deren Hilfe man die Stärke von Erdbeben angibt.

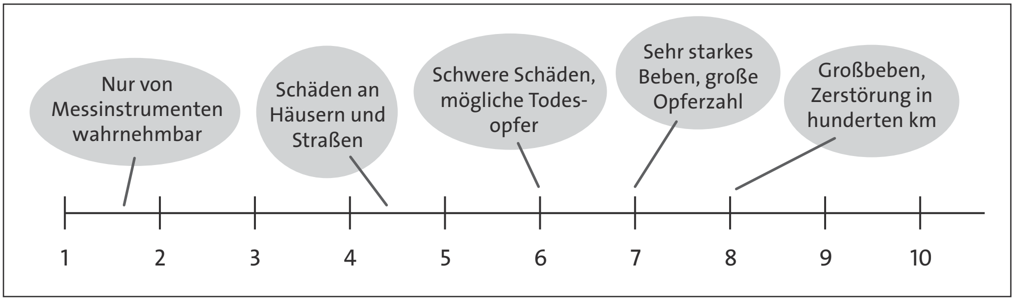



**Abbildung 26.10** Richter-Skala

Die Stufen der Skala sind die Hochzahlen der Zehnerpotenzen, welche die Intensität des Erdbebens angeben. So ist ein Erdbeben der Stärke 5 zehnmal stärker als eines der Stärke 4 und 100-mal stärker als eines der Stärke 3.

Die Erstellung der Abbildung 26.7 war nur deshalb so einfach, weil alle vorliegenden Daten in Form von Zehnerpotenzen gegeben waren. Was aber, wenn in die Abbildung die Höhe der Kalmit, des höchsten Gipfels im Pfälzer Wald, eingetragen werden soll? Die Kalmithöhe beträgt 673 m, und das ist keine Zehnerpotenz.

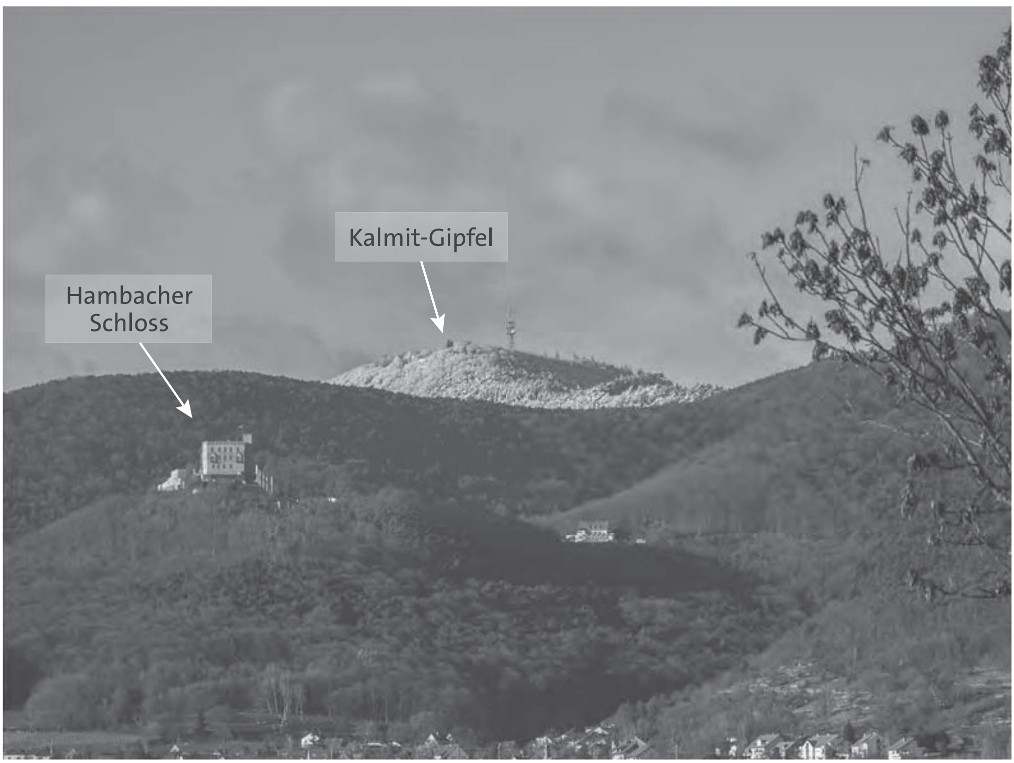



**Abbildung 26.11** Hambacher Schloss und Kalmit-Gipfel, Foto: H. Fischer [FIS]

Damit man diese Zahl in die Skala eintragen kann, muss man sie als Potenz von 10 schreiben, das heißt, man muss fragen, mit welcher Zahl $x$ man 10 potenzieren muss, um 673 zu erhalten. Als Gleichung geschrieben heißt dies: $10^x = 673$. Diese Gleichung ist nach $x$ aufzulösen. Die Zahl $x$ nennt man in der Mathematik den *Zehnerlogarithmus* von 673.

Das Wort Logarithmus ruft bei vielen Menschen unangenehme Erinnerungen an nicht verstandenen Mathematikstoff hervor. Dabei ist es in der heutigen Zeit ganz einfach geworden, solche Probleme zu lösen. Man tippt in einem Taschenrechner die Zahl 673 ein und drückt dann die Taste *log10* (manchmal auch *lg* oder einfach *log* genannt). In der Anzeige steht daraufhin (je nach Anzahl der angezeigten Stellen) das gerundete Ergebnis 2,828015. Die Mathematiker schreiben: $log_{10}(673) \approx 2{,}83$.

Zur Probe kann man jetzt 2,828015 und $10^x$ tippen und erhält 672,999900, also gerundet 673. Also gilt $10^{2{,}828015} \approx 673$.

Jetzt ist auch klar, an welcher Stelle der Skala man die Höhe der Kalmit markieren muss. Die Zahl 2,82 liegt zwischen 2 und 3 auf der Skala aus Abbildung 26.6 bzw. zwischen $10^2$ und $10^3$ auf der Skala in Abbildung 26.7.

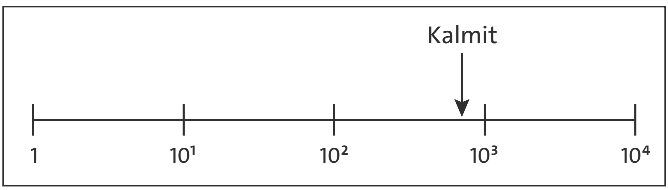



**Abbildung 26.12** Höhe der Kalmit in logarithmischer Skala

## 26.6 Das Leben ist logarithmisch

Das mathematische Denken hat sich den Logarithmus zunutze gemacht, um große Zahlenbereiche auf Skalen darstellen zu können. Überraschenderweise verfährt die Natur ebenso. Sie verwendet im Prinzip denselben Zusammenhang, um die erstaunlichen Leistungen unserer Sinnesorgane zu ermöglichen.

Dabei muss man zwei unterschiedliche Größen betrachten, einmal den äußeren Reiz $R$ und zum anderen die dadurch ausgelöste innere Empfindung $E$. Man könnte dies auch so beschreiben: Es existieren zwei unterschiedliche Welten. Die eine Welt ist die der äußeren *physikalischen Reize*, die andere die der *inneren Empfindungen*. Unsere Sinnesorgane vermittteln zwischen diesen beiden Welten.

Als Beispiel betrachten wir hier die Lautstärke, mit der unser Ohr Töne wahrnimmt.

Die Größe der Trommelfellschwingungen führt dabei zur Empfindung der Lautstärke. Diese Größe hängt mit der Intensität der ankommenden Schallwellen zusammen. Für das menschliche Ohr schwanken diese Intensitäten zwischen zwei Empfindungsgrenzen. Die untere Grenze stellt die Hörschwelle dar, welche die gerade hörbare Intensität repräsentiert. Die obere Hörgrenze ist durch den vom Schall hervorgerufenen beginnenden physiologischen Schmerz gegeben. Beide Grenzen hängen von der Tonhöhe ab. Für einen 1000-Hz-Ton (Tonhöhe zwischen h'' und c''') liegen diese Grenzen bei $10^{-12}$ Watt / $m^2$ und 1 Watt / $m^2$. Dies entspricht einem unglaublichen Intervall von 12 Zehnerpotenzen. Wie kann das unser Hörorgan bewältigen?

## 26.7 Das Weber-Fechnersche Gesetz

Der Leipziger Anatom und Physiologe Ernst Heinrich Weber (1795–1878) hat das menschliche Empfinden auf äußere Reize untersucht. Gustav Theodor Fechner (1801–1887) hat diese experimentell gewonnenen Daten untersucht und festgestellt, dass die Empfindung, die von einem Reiz ausgelöst wird, nicht proportional zur Reizstärke ist, sondern dass die Empfindung proportional zum Logarithmus der Stärke des auslösenden Reizes ist.

Genauer gilt:

$E(R) = k \cdot \log(R/R_0)$, wobei $E(R)$ die Empfindung ist, die der Reiz $R$ auslöst. $R_0$ ist die Reizschwelle, ab der eine Empfindung entsteht, $k$ ist eine Konstante.

Die Empfindung $E(R_0)$ ist gleich null, was auch durch die Rechnung bestätigt wird: $E(R_0) = k \cdot \log(R_0/R_0) = k \cdot \log(1) = 0$

Wir betrachten jetzt einen Reiz, der 1000-mal stärker als die Reizschwelle $R_0$ ist, und verwenden das *Weber-Fechnersche Gesetz*, um die wahrgenommene Empfindung zu bestimmen:

$E(1000 \cdot R_0) = k \cdot \log(1000 \cdot R_0/R_0) = k \cdot \log(1000) = k \cdot \log(10^3) = 3 \cdot k$.

Für $R = 10\,000 \cdot R_0$ gilt entsprechend $E(10\,000 \cdot R_0) = 4 \cdot k$.

Für $R = 10^n \cdot R_0$ ergibt sich die Empfindung $n \cdot k$.

Diese Beispiele verdeutlichen, dass die Stärke der Empfindung mit der Hochzahl des als Zehnerpotenz geschriebenen Reizes wächst, das heißt: logarithmisch.

Der riesige Bereich der Reizstärken wird also auf ein kleineres Intervall abgebildet, das vom Hörorgan leichter bearbeitet werden kann. Dasselbe Prinzip gilt auch für den Sehsinn, den Tastsinn, die Temperaturempfindung, den Geruchs- und Geschmackssinn, d. h. für alle unsere Sinne. Das Leben ist also logarithmisch.

## 26.8 Zum Mitmachen: Erstellen Sie eine logarithmische Skala

Stellen Sie die natürlichen Zahlen von 1 bis 10 auf einer logarithmischen Skala dar. Das können Sie mit einem Taschenrechner, einem Lineal und einem Blatt Papier machen oder auch mit der Tabellenkalkulation.

Lassen Sie für die Zahlen von 1 bis 10 den Logarithmus zur Basis 10 berechnen (Abbildung 26.13, Spalten A und B). Fügen Sie die Spalte C mit lauter Nullen hinzu.

Markieren Sie die Spalten B und C und lassen Sie diese zeichnen. Die erhaltene Abbildung sollten Sie mit den Zahlen von 1 bis 10 beschriften (Abbildung 26.14).

=log(A2;10)

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | n | log(n;10) | 0 |
| 2 | 1 | 0,0000 | 0 |
| 3 | 2 | 0,3010 | 0 |
| 4 | 3 | 0,4771 | 0 |
| 5 | 4 | 0,6021 | 0 |
| 6 | 5 | 0,6990 | 0 |
| 7 | 6 | 0,7782 | 0 |
| 8 | 7 | 0,8451 | 0 |
| 9 | 8 | 0,9031 | 0 |
| 10 | 9 | 0,9542 | 0 |
| 11 | 10 | 1,0000 | 0 |

**Abbildung 26.13** Tabellenblatt zur logarithmischen Skala

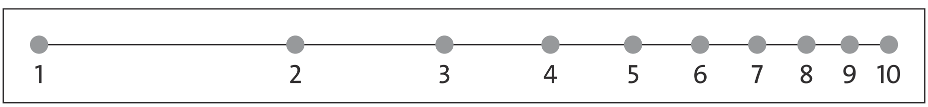



**Abbildung 26.14** Logarithmische Skala für die Zahlen von 1 bis 10