Kapitel 9

Graphen

Graphen eignen sich sehr gut dafür, zusammengehörige oder abhängige Daten zu speichern. Wir werden in diesem Kapitel erklären, was Graphen sind und wie man mit ihnen Daten in Beziehung setzt. Außerdem werden wir einfache Algorithmen auf Graphen ausprobieren.

Knobelei zum Einstieg

9.1 Morgendliches Anziehen

Jeden Morgen dasselbe! Nach dem Duschen nimmt man die Kleidungsstücke, die man am Tag tragen möchte, aus dem Schrank und zieht sie dann an. Aber wie oft passiert es, dass man schlaftrunken das T-Shirt anzieht und danach das Unterhemd noch in der Hand hält? Natürlich ist es ärgerlich, kostet aber bei wenigen Kleidungsstücken noch nicht so viel Zeit. Aber wie ist es, wenn man im Winter feststellt, dass man das T-Shirt vergessen hat, wenn man schon den Schneeanzug trägt?

Damit wir mit solchen Situationen in der Zukunft keine Zeit mehr verschwenden, wollen wir uns überlegen, wie wir diesen Vorgang besser organisieren können. Stellen Sie sich vor, Sie möchten heute die folgenden Kleidungsstücke tragen:

- Handschuhe
- lange Unterhose
- Mütze
- Pullover
- Schneeanzug
- Schuhe
- Socken
- T-Shirt
- Unterwäsche

Überlegen Sie sich doch einmal, welche Abhängigkeiten beim Anziehen Ihrer Kleidungsstücke existieren, und schreiben Sie sie auf. Dass die Unterwäsche vor dem T-Shirt angezogen werden muss, könnte man beispielsweise so notieren:

Unterwäsche → T-Shirt

Da es egal ist, in welcher Reihenfolge Sie zum Beispiel die Unterwäsche und die Socken anziehen, kommt diese Kombination in der Liste der Abhängigkeiten nicht vor.

Fassen Sie im nächsten Schritt die Abhängigkeiten zusammen, sodass jedes Kleidungsstück nur noch einmal vorkommt. Welches Bild kommt dabei zustande? Wie könnten Sie nun mit diesem Bild eine Reihenfolge finden, in der Sie die Kleidungsstücke ohne Probleme anziehen können?

In Abbildung 9.1 haben wir die Abhängigkeiten der Kleidungsstücke graphisch dargestellt. Möglicherweise haben Sie in Ihrem Bild einige Pfeile mehr. Diese haben wir in unserer Darstellung entfernt, weil sie indirekt in ihr enthalten sind. Beispielsweise muss natürlich das

T-Shirt vor dem Schneeanzug angezogen werden, jedoch ist dies dadurch gegeben, dass das T-Shirt vor dem Pullover und dieser vor dem Schneeanzug angezogen werden muss.

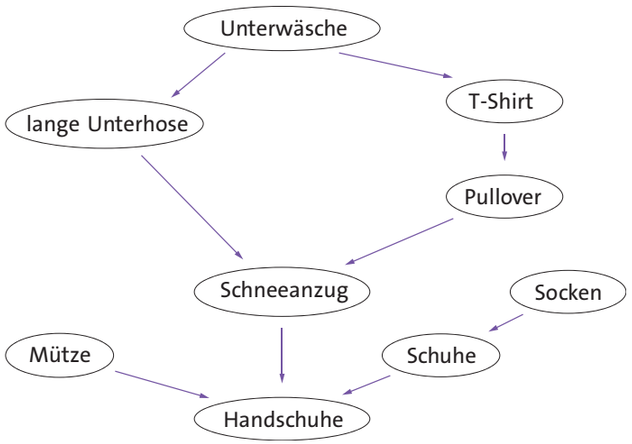


Abbildung 9.1 Abhängigkeiten der Kleidungsstücke

Aus dieser Abbildung können Sie nun schon einiges ablesen. Beispielsweise müssen die Schuhe, der Schneeanzug und die Mütze angezogen sein, bevor Sie die Handschuhe anziehen können. Außerdem sind die Handschuhe das letzte Kleidungsstück, das angezogen wird. Beginnen können Sie mit der Unterwäsche, den Socken oder der Mütze, da diese keine vorherigen Abhängigkeiten, also keine eingehenden Pfeile, haben. Genau so können Sie auch eine Reihenfolge für die Kleidungsstücke finden, die insgesamt funktioniert. Sie können ein Kleidungsstück anziehen, wenn es keine vorherigen Abhängigkeiten hat. Ziehen Sie ein Kleidungsstück an, kann es aus dem Diagramm entfernt werden. Anschließend haben Sie neue Kleidungsstücke, die Sie anziehen können. Diesen Algorithmus nennt man auch *topologisches Sortieren*. Eine mögliche Reihenfolge zum Anziehen der Kleidungsstücke:

Unterwäsche → lange Unterhose → T-Shirt → Pullover → Schneeanzug
→ Socken → Schuhe → Mütze → Handschuhe

9.2 Verknüpfte Daten

Verknüpfte Daten sind überall in der Welt vorhanden. Etwas später in diesem Kapitel werden wir uns zum Beispiel mit Straßenverbindungen zwischen Städten und einem Freundschaftsnetzwerk beschäftigen. Solche Verknüpfungen in den Datenstrukturen darzustellen, die Sie bisher kennengelernt haben, ist nur schwer möglich.

Graphen bieten sich genau dafür an. Sie bestehen grundsätzlich aus einer Menge von *Knoten* und *Kanten*. Ein Knoten im Graphen steht stellvertretend für ein Objekt. Das kann beispielsweise wie in der Knobelei ein Kleidungsstück oder eine Stadt auf einer Landkarte sein. Eine Kante verbindet zwei Knoten, wie zum Beispiel eine Straße zwei Städte verbindet. Wenn zwei Knoten mit einer Kante verbunden sind, nennt man sie *benachbart*. In vielen Algorithmen auf Graphen spricht man von der *Nachbarschaft* eines Knotens. Damit sind dann alle Knoten gemeint, die mit diesem Knoten benachbart sind.

Knoten notiert man im Regelfall mit einem Kreis. Eine Kante ist eine Linie zwischen zwei Knoten. In Abbildung 9.2 sehen Sie einen einfachen Graphen, in dem zwei Knoten *A* und *B* durch eine Kante verbunden sind. Beim Zeichnen von Graphen ist es nicht wichtig, wo die Knoten platziert werden. *A* und *B* könnten also beliebig verschoben werden; die Aussage, dass die beiden Knoten verknüpft sind, bleibt bestehen. Da es bei Graphen nur um das Darstellen dieser Verknüpfung geht, ist die genaue Positionierung unwichtig.

Abbildung 9.2 Ein einfacher Graph mit zwei Knoten und einer Kante zwischen diesen Knoten

9.3 Varianten von Graphen

Graphen modellieren immer einen Sachverhalt. Manchmal reicht die Information, dass zwei Knoten verbunden sind, jedoch nicht aus, sondern es müssen abhängig vom Kontext weitere Informationen gespeichert werden. Zusätzlich zur Beziehung zwischen zwei Knoten kann man in einem Graphen auch gut speichern, wie genau diese Beziehung ausgestaltet ist. Gilt sie in beide Richtungen? Ist sie mit einer Art Kosten verbunden? Für diese zwei typischen Anforderungen gibt es Varianten von Graphen, die diese zusätzlichen Informationen modellieren können.

Gerichtete Kanten

Gerichtete Kanten ermöglichen es, einseitige Verbindungen in einem Graphen darzustellen. Die Richtung der Kante wird durch einen Pfeil im Graphen markiert, wie Abbildung 9.3 zeigt. In diesem Beispiel ist Knoten *A* mit Knoten *B* verbunden, und außerdem gilt: Knoten *A* zeigt auf Knoten *B*.

Abbildung 9.3 Ein einfacher gerichteter Graph. Die Kante zeigt von Knoten »A« zu Knoten »B«.

Solche Graphen haben Sie schon in der Knobelei kennengelernt. Die Abhängigkeiten zwischen den Kleidungsstücken waren einseitig. Ein Straßennetz ist ein anderes Beispiel, bei dem gerichtete Kanten oft zum Einsatz kommen. So können wir Einbahnstraßen als gerichtete Kanten modellieren, um beispielsweise beim Berechnen von Routen darzustellen, dass die Straße nur in eine Richtung befahren werden kann.

Wenn keine Kante des Graphen eine Richtung hat, wird der Graph *ungerichtet* genannt.

Gewichtete Kanten

Möchten wir zum Beispiel die Distanzen zwischen zwei verbundenen Städten ausdrücken, können wir dies einfach mit *Kantengewichten* tun. Kantengewichte werden als Zahl an der Kante notiert, wie in Abbildung 9.4 dargestellt, und manchmal auch als *Kantenkosten* bezeichnet.

Abbildung 9.4 Ein einfacher gewichteter Graph. Die Kante zwischen den Knoten »A« und »B« hat das Gewicht 5.

Die Bedeutung eines Kantengewichts kann sehr vielfältig sein. Es kann die Distanz zwischen zwei Städten beschreiben, die Übertragungsgeschwindigkeit einer Datenleitung oder auch den Grad einer Freundschaft zwischen zwei Personen. Die Bedeutung hängt ganz von dem Kontext ab, für den der Graph modelliert wird, und spielt dann in den Algorithmen eine Rolle, die auf dem Graphen ausgeführt werden. Angenommen, das Kantengewicht eines Graphen steht für die Distanz zwischen zwei Städten. Wenn dann die kürzesten Wege in der als Graph modellieren Landkarte gesucht werden sollen, entscheidet dieses Gewicht darüber, ob ein Weg über eine Straße (beziehungsweise Kante) führt. Je nachdem, wie hoch das Gewicht ist, kann eventuell auch ein kürzerer Weg gefunden werden, der vielleicht sogar mehr, aber dennoch in Summe günstigere Kanten verwendet.

Hat ein Graph keine Kantengewichte, wird er *ungewichtet* genannt.

Beispiele für Graphen

Eines der natürlichsten Beispiele für Graphen sind Landkarten. In Abbildung 9.5 haben wir einige deutsche Großstädte und deren Distanzen dargestellt. Die Knoten sind dabei die Städte selbst; die Kanten sind einige Autobahnen, die diese Städte verbinden. Das Gewicht der Kanten sind die Distanzen in Kilometern zwischen den benachbarten Städten. Eine typische Fragestellung zu so einem Graphen ist, ob zwei bestimmte Städte (möglicherweise über andere Städte) miteinander verbunden sind und wie groß die daraus resultierende

Distanz zwischen den beiden Städten ist. So können wir mit dem Graphen aus Abbildung 9.5 ermitteln, dass die Entfernung von Hamburg nach München 885 Kilometer beträgt. Der Weg führt von Hamburg über Berlin und Nürnberg nach München.

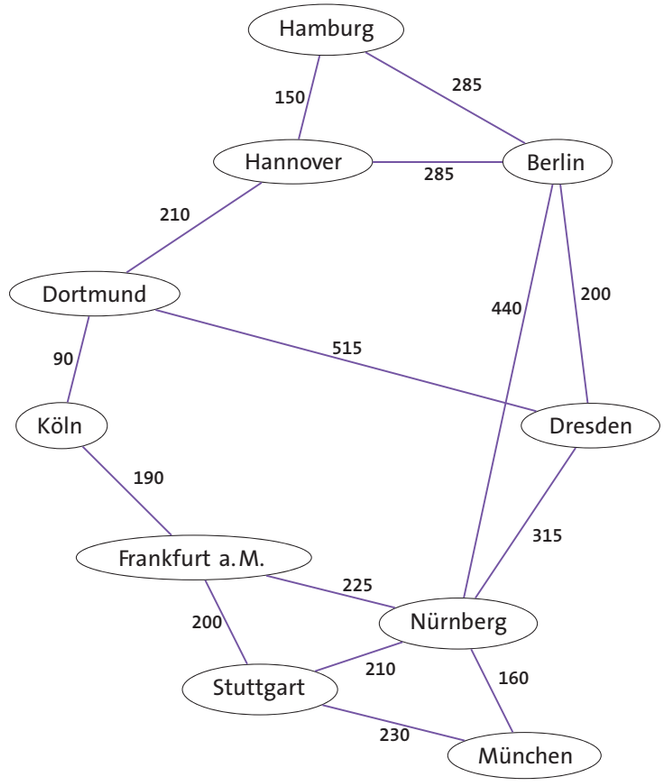


Abbildung 9.5 Einige deutsche Großstädte und ihre Verbindungen über Autobahnen. Die Kantengewichte stehen für die Distanz zwischen den Städten.

Das Straßennetzwerk von Deutschland ist schon beim Betrachten einer Straßenkarte als Graph erkennbar. Ein etwas versteckteres Beispiel für Graphen sind soziale Netzwerke. In Abbildung 9.6 haben wir das soziale Netzwerk einer Schulklasse dargestellt. Die Knoten sind die Schüler; eine Kante zeigt an, dass zwei Schüler befreundet sind.

Für dieses soziale Netzwerk könnten wir nun bestimmen, welche Person die beliebteste ist, also die meisten Freunde hat. Die Anzahl der Freunde einer Person entspricht der Anzahl an Kanten am entsprechenden Knoten. Dieser Wert wird auch der *Grad* eines Knotens genannt. Entdecken Sie den beliebtesten Schüler dieser Klasse?

Außerdem könnten wir Cliquen finden. Eine Clique ist eine Menge von Personen, die alle miteinander befreundet sind. Auch in der Graphentheorie nennt man dies eine *Clique* und definiert, dass jedes Paar von Knoten in der Clique durch eine Kante verbunden sein muss. Finden Sie die größte Clique in dieser Klasse?

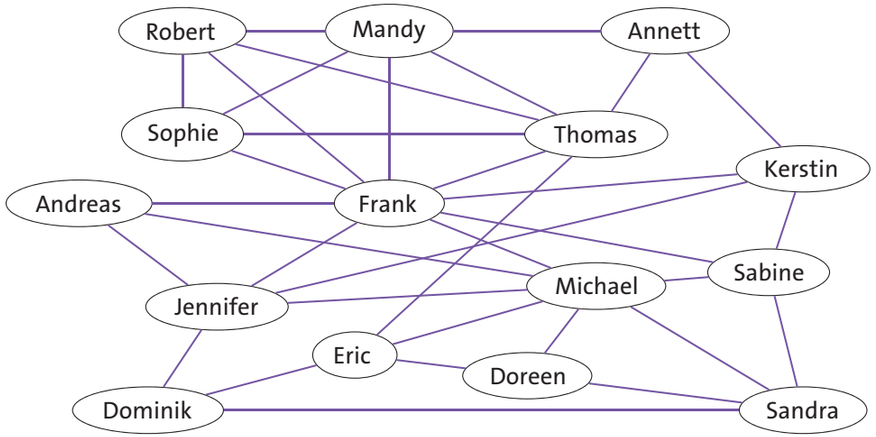


Abbildung 9.6 Das soziale Netzwerk einer Schulklasse

In der Klasse in Abbildung 9.6 ist Frank der beliebteste Schüler, da er 9 Freunde hat. Die größte Clique besteht aus Robert, Mandy, Thomas, Frank und Sophie.

9.4 Suchen und Bewegen in Graphen

Eine der Grundoperationen auf Graphen ist das Suchen nach einem Knoten oder einer Verbindung. Beispielsweise ist es oft relevant zu wissen, ob ein Knoten von einem anderen Knoten erreichbar ist, sei es, um eine Nachricht in einem Kommunikationsnetzwerk übermitteln zu können oder eine Baustelle im Straßennetz zu umfahren. Dafür werden Suchverfahren verwendet, die systematisch jeden Knoten im Graphen besuchen und dabei nach einem Verbindungsweg zwischen den beiden Knoten Ausschau halten. Jede Suche beginnt bei einem bestimmten Startknoten und endet, sobald entweder das Suchziel (zum Beispiel ein anderer Knoten) erreicht wurde oder alle Knoten betrachtet wurden.

Die zwei Standardverfahren dafür nennen sich *Tiefensuche* und *Breitensuche*. Beide basieren auf der Idee, nach und nach alle Nachbarn eines Knoten zu besuchen, ebenso die Nachbarn der Nachbarn und so weiter. Da der ursprüngliche Knoten selbst auch ein Nachbar seines Nachbarn ist, müssen die Algorithmen dafür speichern, welche Knoten sie schon besucht haben, um nicht im Kreis Nachbarschaftsbeziehungen zu verfolgen. Wann immer ein Knoten *besucht* wird, werden einmal alle seine Nachbarn betrachtet und als *gesehen*, aber noch nicht als *abgearbeitet* gespeichert, falls sie nicht schon zuvor besucht oder gesehen wurden. Die beiden Algorithmen verfahren dann fast gleich und unterscheiden sich lediglich darin, in welcher Reihenfolge *gesehene* Knoten besucht werden. Die Breitensuche betrachtet zunächst die nähere Umgebung des Startknotens, bevor sie sich weiter entfernt. Wie eine Welle besucht der Algorithmus also zunächst alle Knoten, die direkt mit dem Startknoten benachbart sind, dann die Knoten mit zwei Kanten Entfernung vom Start, die mit drei und so weiter. Die Tiefensuche dagegen verfolgt zunächst einen Weg durch den Graphen, bis sie erfolgreich war oder in einer Sackgasse gelandet ist, und betrachtet erst dann die Umgebung des Weges. Auf den Graphen in Abbildung 9.7 können Sie diesen Unterschied nachvollziehen.

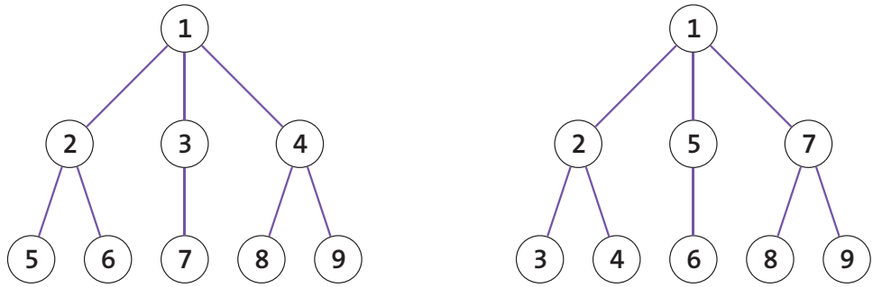


Abbildung 9.7 Breitensuche (links) und Tiefensuche (rechts) besuchen Knoten in unterschiedlicher Reihenfolge.

Implementierung

Die beiden Suchverfahren können wie in Listing 9.1 implementiert werden. In den ersten beiden Zeilen werden die angesprochenen Listen der besuchten und der gesehenen Knoten angelegt. Zum Anfang kennt der Algorithmus bereits den Startknoten und kann ihn daher der Liste gesehener Knoten hinzufügen. Anschließend werden die folgenden Befehle so lange wiederholt, bis die Liste der gesehenen Knoten leer ist (Zeile 4). In jeder Iteration nimmt sich der Algorithmus den nächsten gesehenen Knoten (Zeilen 5 und 6). Dieser Knoten wird im aktuellen Schleifendurchlauf *besucht*, falls er dies nicht schon zuvor wurde (Zeile 7). Falls das der Fall ist, wird der folgende Code nicht ausgeführt, sondern es wird mit der nächsten Iteration fortgesetzt. Sollte er noch nicht besucht worden sein, fügt der Algorithmus ihn der Liste der besuchten Knoten hinzu (Zeile 8). So wird verhindert, dass der Algorithmus endlos läuft, weil er immer wieder dieselben Knoten besucht.

Mit *aktuellerKnoten*.Nachbarn wird auf die Liste der Nachbarn des aktuellen Knotens zugegriffen. Diese werden in diesem Schritt gesehen und deshalb der entsprechenden Liste hinzugefügt. Jeder Knoten kann sich mehrfach in der Liste der gesehenen Knoten befinden. Da er aber aufgrund der Überprüfung in Zeile 7 nur einmal vom Algorithmus bearbeitet wird, ist das in Ordnung.

```
Eingabe: Startknoten s
01  besuchteKnoten := VerketteteListe()
02  geseheneKnoten := VerketteteListe()
03  geseheneKnoten.first := s
04  Wiederhole solange geseheneKnoten nicht leer
05     aktuellerKnoten := geseheneKnoten[0]
06     Entferne erstes Element von geseheneKnoten
07     Falls aktuellerKnoten nicht in besuchteKnoten dann
08        Füge aktuellerKnoten zu besuchteKnoten hinzu
09        Wiederhole für alle n in aktuellerKnoten.Nachbarn
10           Falls n nicht in besuchteKnoten dann
11              Füge n zu geseheneKnoten hinzu
```

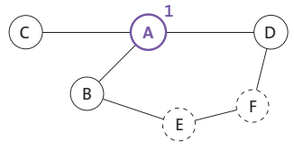
Listing 9.1 Eine Suche über alle Knoten eines Graphen. Es ist nicht spezifiziert, wonach gesucht wird oder was die Ausgabe ist.

Die Implementierung ist für die Tiefen- und die Breitensuche nahezu gleich. Lediglich die Wahl der verwendeten Datenstruktur für die Liste gesehener Knoten führt zu den unterschiedlichen Suchabläufen. Darum unterscheiden sich die Algorithmen nur im Verhalten in Zeile 11. Die Tiefensuche fügt die Knoten zur Liste der gesehenen Knoten vorn hinzu, während die Breitensuche sie hinten anfügt.

Beispiel

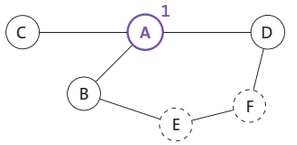
Im folgenden Beispiel führen wir auf demselben Graphen die Tiefen- und die Breitensuche parallel aus, um die Algorithmen zu veranschaulichen. Die Tiefensuche ist jeweils links dargestellt, die Breitensuche rechts. Besuchte Knoten sind fett markiert, gesehene werden durch eine dünne und noch nicht gesehene Knoten durch eine gestrichelte Linie wiedergegeben. Wir beginnen bei Knoten *A*, wie Abbildung 9.8 zeigt. Beide Algorithmen sehen die Knoten *B*, *C* und *D*. Wir gehen davon aus, dass die Knoten alphabetisch gespeichert sind und deshalb auch in dieser Reihenfolge der Liste hinzugefügt werden.

Tiefensuche:



Besuchte Knoten: A
Gesehene Knoten: D, C, B

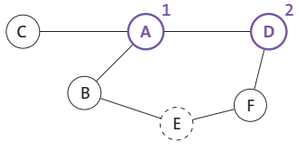
Breitensuche:



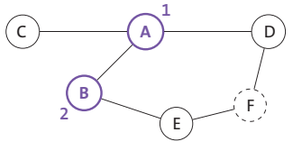
Besuchte Knoten: A
Gesehene Knoten: B, C, D

Abbildung 9.8 Der vorderste Knoten, Knoten »A«, wird besucht. Dadurch werden die Knoten »B«, »C« und »D« gesehen.

Nun wird jeweils der vorderste Knoten aus der Liste mit den gesehenen Knoten besucht. Während die Tiefensuche *D* als Nächstes besucht, besucht die Breitensuche zuerst *B* (Abbildung 9.9). Die Tiefensuche fügt den neu gesehenen Knoten *F* vorn der Liste hinzu, die Breitensuche fügt Knoten *E* hinten an.



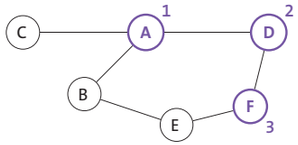
Besuchte Knoten: A, D
Gesehene Knoten: F, C, B



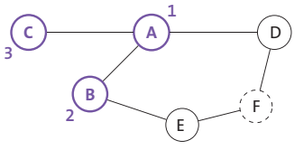
Besuchte Knoten: A, B
Gesehene Knoten: C, D, E

Abbildung 9.9 Im zweiten Schritt besucht die Tiefensuche Knoten »D«, die Breitensuche Knoten »B«.

Bei der Tiefensuche steht nun Knoten *F* vorn und wird als Nächstes besucht, wie der linke Teil von Abbildung 9.10 zeigt. Dabei wird Knoten *E* entdeckt. Die Breitensuche besucht als Nächstes Knoten *C* und sieht daher keine neuen Knoten.



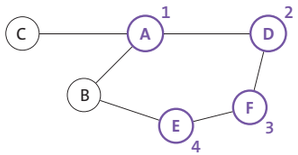
Besuchte Knoten: A, D, F
Gesehene Knoten: E, C, B



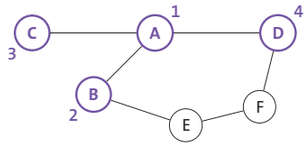
Besuchte Knoten: A, B, C
Gesehene Knoten: D, E

Abbildung 9.10 Da die Tiefensuche Knoten »F« besucht, entdeckt sie Knoten »E«. Die Breitensuche entdeckt keinen neuen Knoten, da »C« keine Nachbarn mehr hat.

Die Tiefensuche verfolgt weiter ihren Weg in die Tiefe und besucht *E* als Nächstes. Dadurch wird *B* erneut gesehen und vorn der Liste hinzugefügt. Die Breitensuche arbeitet nach wie vor die direkten Nachbarn von *A* ab und besucht daher *D*. Nun entdeckt auch sie Knoten *F*. Abbildung 9.11 zeigt den aktuellen Stand.



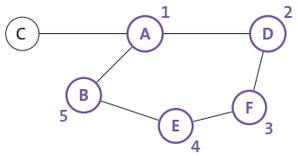
Besuchte Knoten: A, D, F, E
Gesehene Knoten: B, C, B



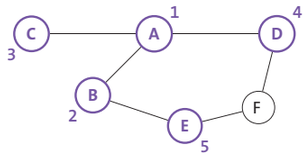
Besuchte Knoten: A, B, C, D
Gesehene Knoten: E, F

Abbildung 9.11 Die Tiefensuche besucht »E« als Nächstes und findet »B« erneut. Er wird daher der Liste doppelt hinzugefügt. Die Breitensuche findet Knoten »F«, da sie Knoten »D« besucht.

Die Tiefensuche besucht nun *B*. Damit beendet sie ihren Rundlauf, da Knoten *A* schon besucht wurde und deshalb nicht noch einmal der Liste hinzugefügt wird, wie auch Abbildung 9.12 zeigt. Die Breitensuche besucht als Nächstes Knoten *E* und sieht *F* ein zweites Mal. Knoten *F* wird daher erneut der Liste hinzugefügt.



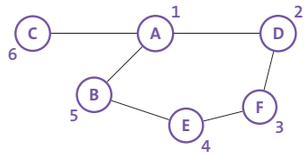
Besuchte Knoten: A, D, F, E, B
Gesehene Knoten: C, B



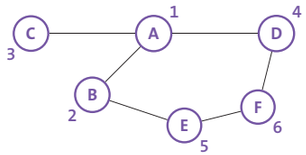
Besuchte Knoten: A, B, C, D, E
Gesehene Knoten: F, F

Abbildung 9.12 Die Tiefensuche beendet ihren Rundlauf, bei der Breitensuche fehlt nur noch Knoten »F«.

Die Tiefensuche besucht als Nächstes Knoten *C*. Bei der Breitensuche wird Knoten *F* besucht. Es wurden nun alle Knoten besucht, wie Sie in Abbildung 9.13 erkennen können.



Besuchte Knoten: A, D, F, E, B, C
Gesehene Knoten: B

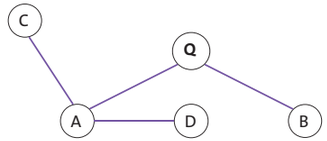


Besuchte Knoten: A, B, C, D, E, F
Gesehene Knoten: F

Abbildung 9.13 Beide Suchverfahren haben nun alle Knoten besucht. Die verbleibenden gesehenen Knoten sind alle schon besucht und werden daher verworfen.

Beide Suchverfahren arbeiten noch die restlichen Elemente in ihren Listen ab. Da diese Knoten aber alle schon besucht wurden, terminiert die Suche anschließend.

9.5 Eigenschaften von Graphen



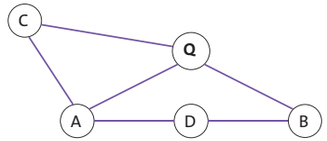


Abbildung 9.14 Zwei Graphen, die die Wasserversorgung von vier Städten zeigen. Die Quelle (»Q«) ist genauso wie die Städte durch einen Knoten repräsentiert. Die Kanten zwischen den Knoten sind Wasserleitungen zur Versorgung der Städte.

Wasser in unseren Städten sehen wir als etwas Selbstverständliches an. Damit aber tatsächlich Wasser in jedem Haushalt aus den Leitungen kommt, muss das Wasser von einer Quelle zu den Städten transportiert werden. Abbildung 9.14 zeigt zwei Varianten, wie vier Städte mit der Quelle verbunden sind und somit mit Wasser versorgt werden. Vergleichen Sie die beiden Versorgungsnetzwerke. In welchem der beiden Netzwerke gibt es Probleme, die das andere Netzwerk behoben hat?

Bäume und Zyklenfreiheit

Die linke Variante ist sehr anfällig für Versorgungsausfälle. Muss eine der Wasserleitungen gewartet werden oder fällt aus anderen Gründen aus, so sind einige der Städte von der Wasserversorgung abgeschnitten. Rechts gibt es selbst beim Ausfall einer Leitung immer

noch mindestens einen anderen Weg, auf dem das Wasser von der Quelle zu den Städten transportiert werden kann.

Der linke Graph ist ein Baum. Bäume haben Sie bereits in Kapitel 7, »Suchen«, als Suchbäume kennengelernt. Markant für Bäume ist, dass sie keine Kreise, auch *Zyklen* genannt, enthalten, also *zyklenfrei* sind.

Pfade und Kreise

In der Knobelei hatten wir bereits angesprochen, dass Knoten nicht nur direkt durch eine Kante verbunden sein können, sondern auch indirekt über mehrere Kanten. Eine solche Folge von Kanten, die zwei Knoten miteinander verbindet, nennt man *Pfad*. Beispielsweise gibt es zwischen der Quelle und der Stadt *D* im rechten Teil von Abbildung 9.14 mehrere Pfade. Einer der Pfade verläuft über Knoten *B* und ist zwei Kanten lang. Ein anderer Pfad verläuft über die Knoten *C* und *A* und ist somit drei Kanten lang. Endet ein Pfad im selben Knoten, in dem er begonnen hat, so nennt man diesen Pfad auch *Kreis*. Ist der Graph *gerichtet*, können die Kanten auch nur in die eine Richtung verwendet werden.

Für ein Versorgungsnetzwerk ist es ungünstig, wenn das Netzwerk wie ein Baum aufgebaut ist. Viele Algorithmen funktionieren dagegen auf Bäumen besonders gut. Beispielsweise ist es sehr einfach, den längsten Pfad in einem Baum zu finden, während diese Aufgabe auf allgemeinen Graphen sehr schwer zu lösen ist.

Zusammenhang

Wenn zwei Leitungen gleichzeitig ausfallen, garantiert jedoch keine der beiden Varianten aus Abbildung 9.14, dass alle Städte mit Wasser versorgt werden können, wie Abbildung 9.15 zeigt. In diesem Fall spricht man davon, dass der Graph nicht mehr *zusammenhängend* ist, da nicht mehr jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist. Stattdessen besteht er nun aus zwei Teilgraphen, die auch *Zusammenhangskomponenten* genannt werden. Diese Eigenschaft werden Sie später zur Lösung von Aufgabe 3 im Rahmen eines weiteren Beispiels aus der Praxis benötigen.

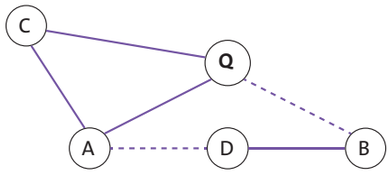


Abbildung 9.15 Zwei der Wasserleitungen sind ausgefallen. Die Städte »B« und »D« sind daher von der Versorgung abgeschnitten. Der Graph ist nun nicht mehr zusammenhängend.

Eulersche Graphen

Damit die Wasserleitungen nicht ausfallen, müssen sie regelmäßig von einem Roboter gewartet werden. Ein solcher Roboter wird in die Wasserleitungen hineingelassen und fährt sie daraufhin alle ab. Damit die Wartung so kurz wie möglich dauert, soll der Roboter keine Leitung doppelt befahren müssen. Gibt es in dem Netzwerk einen Pfad, der jede Kante genau einmal enthält?

Glücklicherweise lässt sich diese Eigenschaft sehr leicht überprüfen. Ein solcher Pfad wird auch *Eulerweg* genannt und existiert genau dann, wenn der Graph zusammenhängend ist und alle bis auf zwei Knoten einen geraden Knotengrad haben, also mit einer geraden Anzahl an Nachbarn verbunden sind. Die beiden anderen Knoten können entweder beide eine ungerade Anzahl an verbundenen Kanten haben oder beide eine gerade Anzahl.

Das Wasserversorgungsnetzwerk rechts in Abbildung 9.14 erfüllt diese Bedingung. Alle Knoten haben eine gerade Anzahl an verbundenen Kanten, bis auf die Knoten *A* und *Q*. Die Knoten *A* und *Q* sind daher die Start- und Endknoten des Pfades. Ein gültiger Eulerweg, bei dem jede Kante genau einmal befahren wird, wäre zum Beispiel:

$$A \to C \to Q \to A \to D \to B \to Q$$

Der Roboter kann also sehr schnell das ganze Netzwerk warten, weil er dabei keine Leitung doppelt befahren muss.

Übrigens: Wenn ein Eulerweg auf demselben Knoten endet, auf dem er gestartet ist, spricht man von einem *Eulerkreis*. Einen Eulerkreis kann es aber nur geben, wenn wirklich alle Knoten einen geraden Knotengrad haben. Zum Finden eines Eulerkreises benutzt man zum Beispiel eine erweiterte Tiefensuche. Ein Graph, in dem ein Eulerkreis existiert, wird auch als *eulerscher Graph* bezeichnet.

Planarität

Das Netzwerk soll nun erweitert werden, um noch ausfallsicherer zu werden. Daher planen wir, die Stadt *D* auch direkt mit der Quelle *Q* zu verbinden und außerdem mit Direktleitungen *A* und *B*, *B* und *C* sowie *C* und *D* zu verbinden. Das daraus resultierende Netzwerk ist in Abbildung 9.16 dargestellt.

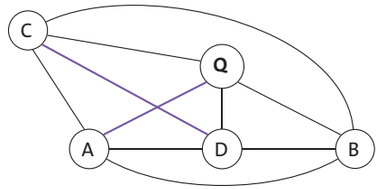


Abbildung 9.16 Im erweiterten Netzwerk überschneiden sich zwei Leitungen.

Nun gibt es in diesem neuen Plan ein Problem: Zwei Wasserleitungen überschneiden sich, und solche Überschneidungen bedeuten Zusatzaufwand. Versuchen Sie einmal, den Planern zu helfen und eine Anordnung derselben Kanten zu finden, die ohne Überschneidungen auskommt! Sie werden feststellen, dass dies nicht möglich ist. Der Graph in Abbildung 9.16 ist daher nicht *planar*, da nicht alle Kanten überschneidungsfrei gezeichnet werden können.

Für dieses Beispiel der Wasserversorgung bedeutet ein nicht planarer Graph, dass es nicht möglich ist, alle Leitungen zu verlegen, ohne dass sich zwei überschneiden. Aber auch in anderen Bereichen wie der Kartographie ist diese Eigenschaft wichtig. Ist ein Graph planar, lassen sich dessen Knoten mit vier verschiedenen Farben einfärben, ohne dass zwei benachbarte Knoten die gleiche Farbe haben. Das ist zum Beispiel nützlich bei der Gestaltung von Landkarten. Wählt man dort die Staaten als Knoten und verbindet benachbarte Staaten mittels Kanten, erhält man einen planaren Graphen und kann deshalb jede Landkarte mit nur vier Farben komplett einfärben.

9.6 Zusammenfassung und Einordnung

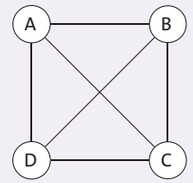
In diesem Kapitel haben Sie Graphen kennengelernt, eine Datenstruktur, die sich sehr gut eignet, um Beziehungen zwischen Objekten darzustellen. Graphen können auf verschiedene Arten erweitert werden; wir haben im Speziellen gewichtete und gerichtete Graphen betrachtet. Außerdem haben Sie anhand eines Wassernetzwerks einige der wichtigsten Eigenschaften von Graphen näher untersucht. Mit der Tiefen- und der Breitensuche kennen Sie nun zwei Standardalgorithmen, mit denen Graphen durchsucht werden können. Diese beiden Algorithmen besuchen die Knoten eines Graphen in unterschiedlicher Reihenfolge, da sie verschiedene Datenstrukturen für die Verwaltung der noch abzuarbeitenden Knoten verwenden.

Die Anwendungsfälle für Graphen sind breit gefächert. Beispielsweise speichern Navigationsgeräte alle Städte und Straßen als Graphen ab. Dank fortgeschrittener Algorithmen, wie zum Beispiel des Algorithmus von Dijkstra zum Finden kürzester Wege, ist es dann möglich, Ihnen beim Autofahren die kürzeste Route vorzuschlagen. Der Algorithmus von Dijkstra basiert genauso wie viele andere Algorithmen im Bereich der Graphen auf den vorgestellten Suchverfahren. Auch in der Softwareentwicklung müssen regelmäßig Graphenprobleme gelöst werden. So lassen sich die Abhängigkeiten eines Softwareprojektes genauso wie die Abhängigkeiten der Kleidungsstücke in der Knobelei darstellen – das trifft im Übrigen auf jeden Prozess zu. Um herauszufinden, in welcher Reihenfolge Aufgaben erledigt werden müssen, können Sie genau wie in der Knobelei die topologische Sortierung verwenden.

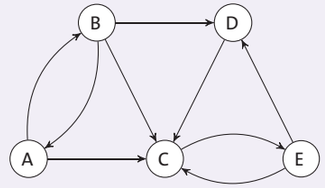
Aufgaben

Aufgabe 1: Eigenschaften von Graphen

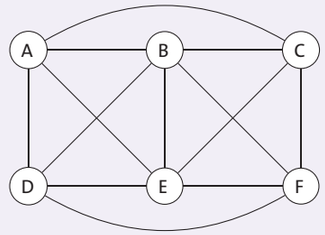
1.



3.



2.



4.

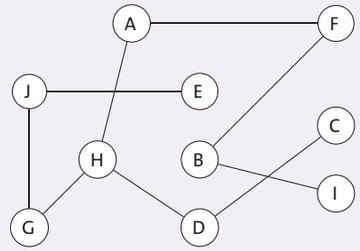


Abbildung 9.17 Welche Eigenschaften haben diese vier Graphen?

Schauen Sie sich die vier Graphen in Abbildung 9.17 an. Welche der folgenden Eigenschaften haben die Graphen?

- Ist der Graph planar?
- Ist der Graph zyklenfrei?

Sollte der Graph ungerichtet sein:

- Lässt sich ein Eulerweg oder ein Eulerkreis finden?
- Ist er zusammenhängend?

Aufgabe 2: Suchen in Graphen

Betrachten Sie erneut den Graphen zu den Freundschaften der Schulklasse aus Abbildung 9.6. Können Sie die folgenden Fragen zu diesem Graphen beantworten?

a) Wie viele Schritte sind mit der Tiefensuche mindestens notwendig, um von Mandy zu Dominik zu finden? Wie viele Schritte dauert es mit der Breitensuche mindestens?

b) Lässt sich mit diesen Aussagen eine generelle Aussage darüber treffen, welche der beiden Suchen schneller den gewünschten Knoten findet?

Aufgabe 3: Graphmodellierung

Brynay ist ein kleines Land weit entfernt von Deutschland. In Brynay gibt es zehn Städte, die mit einem Straßennetz verbunden sind. Die Straßen in Brynay sind in der Regel in beide Richtungen befahrbar, außer einige Straßen in den Bergen und sobald Baustellen auftreten.

Ganz im Westen liegt die Stadt Cerer. Sie ist über eine 90 km lange Straße mit der etwas nördlicher liegenden Stadt Omyr verbunden. Von Omyr führt eine 140 km lange Straße in die Berge nach Hatan. Da diese Straße so schmal ist, kann man sie nur von Omyr nach Hatan befahren. Von Hatan kommt man, ebenfalls nur über eine einseitig befahrbare, 60 km lange Straße, nach Taisul. Taisul ist außerdem über eine 75 km lange Straße mit Omyr verbunden.

Die Stadt Taisul ist über eine 300 km lange Straße mit der Stadt Nallar verbunden. Nallar hat eine 172 km lange Anbindung an die sehr zentral liegende Stadt Dium. Von Dium führt eine 180 km lange Straße in den Norden nach Omyr und eine 200 km lange Straße in den Westen nach Ustria. Auf der Strecke nach Omyr befindet sich eine Baustelle, weshalb man nur von Omyr nach Dium fahren kann. Normalerweise kommt man auch über eine 112 km lange Straße von Ustria nach Cerer, jedoch gibt es dort aktuell ebenfalls eine Baustelle, weshalb man zurzeit nur von Cerer nach Ustria fahren kann.

Von Ustria geht es in die südliche Küstenregion, und zwar zur 81 km entfernten Stadt Baw. 108 Kilometer weiter im Osten liegt Ritson, das über eine Straße von Baw zu erreichen ist. Aus Ritson heraus führt wiederum eine Straße nach Nallar, die 175 Kilometer lang ist, die jedoch gerade aufgrund einer Baustelle nur von Nallar nach Ritson befahrbar ist. Ritson ist außerdem die einzige Möglichkeit, zum etwas nördlicher liegenden Isot zu kommen; die Strecke ist 90 Kilometer lang.

Bitte entwerfen Sie eine Landkarte von Brynay. Zeichnen Sie in diese außerdem die Distanzen zwischen den benachbarten Städten. Versuchen Sie, mithilfe dieser Karte die folgenden Fragen zu beantworten:

a) Ist der Graph zusammenhängend und planar?

b) Wie weit ist die kürzeste Strecke von Hatan nach Isot? Ist es von Isot nach Hatan genauso weit?

c) Angenommen, zwei Autos fahren gleichzeitig mit der gleichen Geschwindigkeit in Ritson los. Das eine Auto möchte nach Omyr, das andere nach Taisul. Welches der Autos kommt eher an seinem Ziel an?

d) Welche Straßen dürfen nicht durch Bauarbeiten vollständig blockiert werden, weil der Graph dann nicht mehr zusammenhängend wäre und deshalb Städte nicht mehr erreicht werden könnten?

Lösungen

Aufgabe 1: Eigenschaften von Graphen

Tabelle 9.1 zeigt, welche Eigenschaften welcher Graph erfüllt. Je nachdem, ob der Graph gerichtet oder ungerichtet ist, wurden bestimmte Zusammenhangseigenschaften ausgelassen.

Eigenschaft	Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4
Planarität	✓	×	✓	✓
Zyklenfreiheit	×	×	×	✓
Zusammenhang	✓	✓	–	✓
Eulerweg	×	✓	–	×
Eulerkreis	×	×	–	×

Tabelle 9.1 Die Eigenschaften der Graphen. Nicht relevante Eigenschaften sind ausgelassen.

Wir möchten gerne einige Erklärungen zum Ergebnis hinzufügen:

- Der erste Graph ist planar, weil man eine der Kanten auch außenrum zeichnen kann. Somit überschneiden sich keine Kanten mehr. Da alle Knoten eine ungerade Anzahl an Kanten haben, lässt sich kein Eulerweg und somit auch kein Eulerkreis finden.
- Aufgrund der beiden langen Kanten ist der zweite Graph nicht mehr planar. Da zwei Knoten eine ungerade Anzahl an Kanten haben, lässt sich zwar ein Eulerweg, aber kein Eulerkreis finden.
- Der dritte Graph ist gerichtet, und da wir in diesem Buch nicht gezeigt haben, wie die drei Eigenschaften Eulerweg, Eulerkreis und Zusammenhang auf gerichteten Graphen definiert sind, haben wir diese Zellen leer gelassen. Diese Eigenschaften lassen sich aber auch für gerichtete Graphen definieren, wie Sie auf der Website zum Buch nachlesen können.

- Der vierte Graph ist ein Baum, da er zusammenhängend und zyklenfrei ist. Er ist zwar in diesem Fall nicht planar gezeichnet, da es sich jedoch um einen Baum handelt, ist dies einfach möglich.

Aufgabe 2: Suchen in Graphen

a) Die Tiefensuche benötigt mindestens 3 Schritte. Dieser Fall tritt ein, wenn die Speicherung der Knoten so aussieht, dass die Tiefensuche im ersten Schritt Frank besucht, anschließend Jennifer und am Ende Dominik. Die Breitensuche hingegen braucht mindestens 12 Schritte. Auch dieser Fall ist abhängig von der Speicherung der Knoten. Im ersten Schritt muss die Breitensuche Frank besuchen. Damit werden dessen Nachbarn der gesehenen Liste hinzugefügt, wobei Jennifer die Erste sein muss, die dieser Liste hinzugefügt wird. Jennifer wird jedoch erst besucht, wenn alle weiteren direkten Nachbarn von Mandy besucht wurden. Wenn Jennifer besucht wird, muss ebenfalls Dominik als Erster der Liste der gesehenen Knoten hinzugefügt werden. Auch in diesem Fall müssen aber erst alle anderen Nachbarn von Frank abgearbeitet werden.

b) Auch wenn in diesem Beispiel die Tiefensuche wesentlich weniger Schritte benötigt hat als die Breitensuche, lässt sich daraus nicht generell schließen, dass die Tiefensuche einen Knoten schneller findet als die Breitensuche. Ein einfaches Gegenbeispiel zeigt dies: Angenommen, die Speicherung ist genauso wie vorhin, und die Tiefensuche besucht nach Frank die Knoten Jennifer und Dominik, gesucht wird aber ein anderer direkter Nachbar von Mandy, zum Beispiel Thomas. Dann ist die Tiefensuche bereits ganz tief im Graphen, während der gesuchte Knoten recht nah an Mandy liegt und von der Breitensuche schon im zweiten Schritt gefunden werden kann.

   Generell trifft man im Vergleich der Tiefen- zur Breitensuche die Aussage, dass die Tiefensuche einen Knoten vermutlich schneller besucht, wenn dieser weit vom Startknoten entfernt liegt, während die Breitensuche eher naheliegende Knoten schneller findet. Letztendlich hängt aber die genaue Anzahl der Schritte von der Speicherung des Graphen ab und somit von der Reihenfolge, in der die Knoten gesehen und besucht werden.

Aufgabe 3: Graphmodellierung

In Abbildung 9.18 sehen Sie den Stadtplan von Brynay. Ebenfalls darin eingezeichnet sind die Distanzen zwischen den Städten. Die Baustellen und nur in eine Richtung befahrbaren Straßen werden mit gerichteten Kanten dargestellt. Dagegen stehen ungerichtete Kanten stellvertretend für beidseitig befahrbare Straßen und somit für zwei gerichtete Kanten. Wir können diese beiden Kantentypen mischen, um den Graphen übersichtlicher zu gestalten.

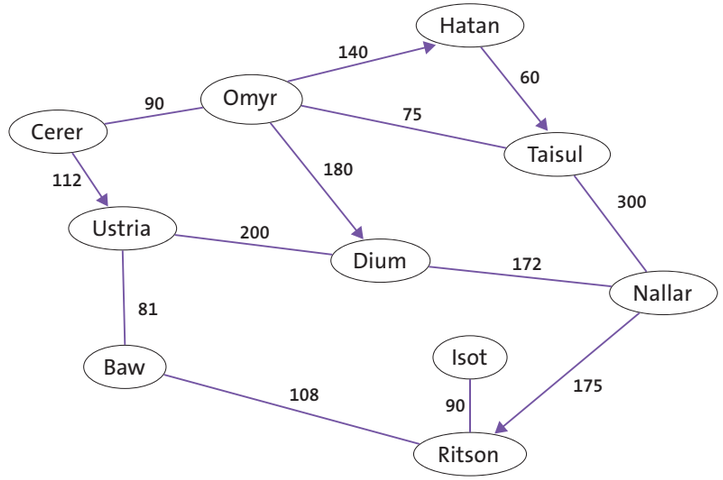


Abbildung 9.18 Die Landkarte von Brynay

a) Der Graph der Städte ist zusammenhängend, da von jeder Stadt aus jede andere Stadt erreicht werden kann. Selbst die entlegenen Städte wie Hatan oder Isot kann man sowohl erreichen als auch wieder verlassen. Da es viele beidseitig befahrbare Straßen gibt, ist es einfach, den Zusammenhang festzustellen. Außerdem ist dieser Graph bereits planar gezeichnet.

b) Die kürzeste Strecke von Hatan nach Isot ist 616 Kilometer lang. Sie führt über Taisul, Omyr, Cerer, Ustria, Baw und Ritson. Aufgrund einiger Baustellen ist die kürzeste Strecke in die andere Richtung leider 1166 Kilometer lang. Sie führt von Isot über Ritson, Baw, Ustria, Dium, Nallar, Taisul und Omyr nach Hatan.

c) Das Auto nach Taisul ist eher am Ziel als das Auto nach Omyr. Das Auto nach Omyr muss sogar über Taisul fahren. Wäre eine der Baustellen zwischen Cerer und Ustria beziehungsweise zwischen Omyr und Dium fertig, wäre das Auto nach Omyr schneller am Ziel. Für die Baustelle zwischen Nallar und Ritson gilt das Gegenteil. Das Auto nach Omyr würde nicht schneller am Ziel ankommen.

d) Die Straßen, die Hatan und Isot mit den anderen Städten verbinden, dürfen nicht bebaut werden, da diese Städte sonst nicht mehr erreichbar wären oder man von Hatan nicht mehr wegkönnte. Bei der aktuellen Baustellensituation gibt es aber noch mehr kritische Straßen: Käme beispielsweise eine Baustelle auf der Strecke von Taisul nach Omyr (in dieser Richtung) hinzu, könnte man aus den meisten Städten nicht mehr nach Omyr und Cerer fahren. Umgekehrt darf auch die Strecke von Baw nach Ustria nicht blockiert werden, weil man dann aus Baw, Ritson und Isot nicht mehr den Rest des Landes erreichen könnte.